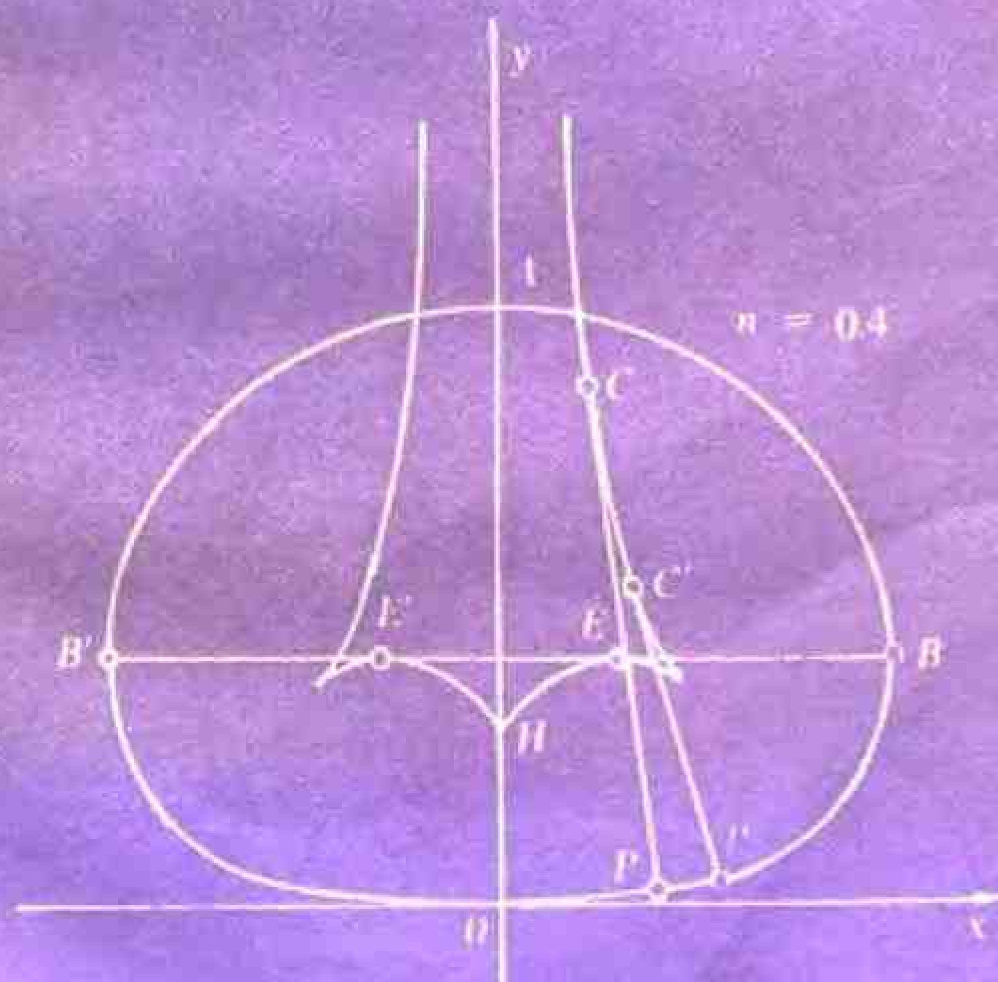
解析几何与微积分学专题

卵圆与卵圆积分及其应用

邵棣 著

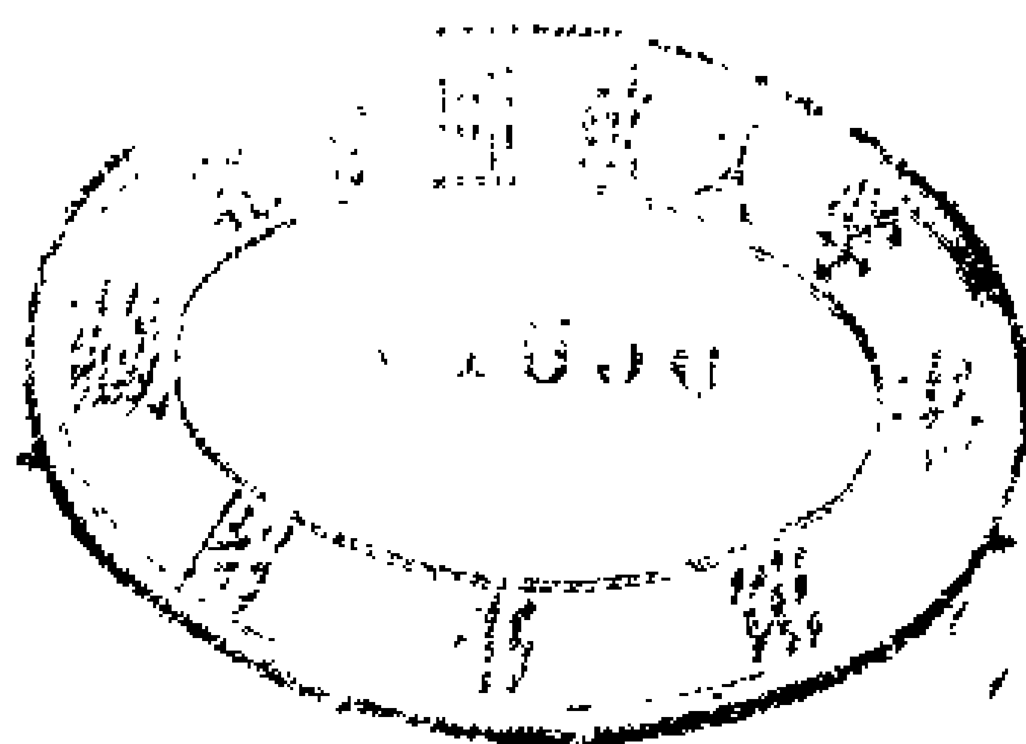


科学技术文献出版社

解析几何与微积分学专题

卵圆与卵圆积分及其应用

邵椽 著



科学技术文献出版社

内 容 简 介

本书从卵圆的定义出发，全面论述了卵圆、卵球的性质、特点，导出了卵圆积分的几种计算公式和卵圆、卵球的形心和转动惯量计算式，指出了卵圆、卵球在工程技术中的应用.本书文字流畅，论述严谨，推导和计算正确，具有较大的理论价值和应用价值.

可供数学专业学生、数学研究人员、工程技术人员及数学爱好者阅读参考.

解析几何与微积分学专题

卵圆与卵圆积分及其应用

邵 禧 著

科学技术文献出版社出版

（北京复兴路15号 邮政编码100038）

北京京辉印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

*

850×1168毫米　32开本　3.625印张　93千字

1991年6月北京第一版第一次印刷

印数：1—3200册

科技新书目：244—096

ISBN 7-5023-1436-9/O·84

定价：2.60元

序

现代几何学把平面凸域的边界曲线叫作卵形线，本书所讨论的曲线——卵圆，是一类特殊的卵形线.它们在平面直角坐标系下可用方程

$$x^2+y^2=\left(a^{\frac{1}{n}}y\right)^{\frac{2n}{n+1}} \qquad (*)$$

表示，其中n为正数.在极坐标下则有更简洁的方程

$$r=a\sin^n\theta \qquad (*)'$$

作者邵檬同志长期从事工程技术方面的工作，平素喜爱数学.根据他在科技方面的经验和学识感觉到卵形线可能有广泛的应用（见本书第十八节）.他发现由方程(*)或(*)′所确定的卵圆，一方面有足够的伸缩性，能够用来逼近工程实际中所需要的各种形状，另一方面，由于表达式十分简明，只用解析几何与初等微积分的工具和方法就可得到关于这类曲线的许多资料.于是，对卵圆作了详细的探讨.

在解析几何或初等微积分的教学用书以及参考书中，对某一类特殊曲线作出详尽讨论的比较少见.本书作为一本良好的对照读物，可以献给初学微积分的读者.作者对卵圆所得出的计算结果，可以完为将卵圆应用于科技实际的工程师们从事计算或设计时有用的参考资料.

见到作者的手稿之后，对他认真的工作态度深为钦佩，故作

序向读者介绍.但愿无论是微积分的初学者，或是有经验的科技工作者均能从本书得益，分享作者辛勤工作的成果.

吉林大学数学系　孙以丰

1988年7月

作 者 的 话

这本小书是应我的一些友人的要求而写的，作为解析几何与微积分学的补充阅读材料。它的目的在于向人们介绍在数学史上一直未曾被研究过但很重要的一类新型曲线，即所谓卵圆的基本性质。

在创立解析几何的历史过程中，人们似乎仅仅集中他们的注意力于直线和圆锥曲线。今天最广泛采用的高中版本同30年代的解析几何教科书的内容几乎没有什么差别。它们始终遵循一种既定的与刻板的形式，内容凝滞。有没有可能在现行的教材中输入一些新鲜血液，使它们焕发青春？

1944年，我的老师孙光远博士——一位博学多才和为人宽厚的数学教授——曾说，卵圆的系统研究在数学领域中仍然是一块空白。在他的建议与鼓励下，我作为他的学生，试图研究在解析几何与微积分学中的这一专题。开始时，虽经多次探索与尝试，但终以没有能够建立起卵圆的确切的定义而告失败。1970年，当我思考一篇有关天体物理学领域中的专题论文“宇宙斥力假说”时，卵圆的图象又不期而然地重现在我的论文中，这使我回忆起昔日孙光远老师对我的期待。我重新开始认真地思考与研究这一课题。由于差不多是一个偶然的念头，我把轨迹定义中的定点的位置取在定直线上（对于所有的圆锥曲线：一个动点到一个定点的距离与它到一条定直线的距离之比为一个常数时，这个动点的轨迹就是一条圆锥曲线。一般地说来，这里的定点的位置并不在定直线上），终于成功地发现了卵圆的轨迹定义，如本书中所述。利用幂膨胀与幂收缩的概念，以及借用相关于机构学中正齿轮设

计中径节定义的涵义，我又发现了卵圆同圆的内在联系。同椭圆比较起来，卵圆的形态更是具有变化万千的多变性，它有助于启迪人们的智慧心扉，陶冶和训练人们领悟和发展更为深邃的概念。作者希望这本书能够帮助揭露卵圆这一主题中的某些抽象性，并且显示出由它而产生的某些萌芽的可能性。通过对卵圆的研究，我们希望能够自如地使卵圆为人们服务，并且造福于人类。

在卵圆这一题材被正式纳入解析几何与微积分学的教本之前，这本书无疑是高中毕业班同学与高等院校理工科学生的一位可靠而亲密的益友。因此，作者希望把这一著作献给广大读者，特别是献给广大的青年学生。

葛旭初教授与鲁子毅同志对这本书的初稿给予了有益的评论和鼓励，认为本书具有相当的学术价值与应用价值，促使作者对这一题材的研究工作得以继续进行，作者谨向他们表示感谢。孙以丰教授对本书进行了审阅和提供一些改正意见，刘运祚教授与傅英凯副教授耐心细致地审读了本书的全稿，并向有关部门大力推荐，作者也向他们表示深忱的谢意。我国第一流的计算数学家张宏伟同志同作者紧密合作，利用美国霍尼韦尔公司生产的DPS 8大型电子数字计算机，准确地计算出了六位有效数字的四类全卵圆积分函数值；对于他的慨慨帮助，作者至深感激。作者还由衷地向刘艳丽女士表达铭感之情，是她以非凡的技巧与无比的热情，打印出了本书中所载的全卵圆积分数值表。

邵　檬

于吉林大学物理系

1988年9月

目　录

一、绪论与目的

卵圆的概念自然是源于鸟类所生的卵，认为它是卵的纵截面形状。人类从原始的茹毛饮血时代开始，由于取食鸟卵，所以在人类进化的漫长年代里，就已经对卵圆具有直观的几何图形的概念，正如人类从对天空中太阳和月亮的观察中具有圆的概念一样。雨滴在空气中自由下落时逐渐加速，而因空气阻力关系最终达到匀速运动时所具有的形状，就是所谓的典型流线型；它的前缘形状的数学表达式，实际上正是卵圆在自然界中的恰当方程；流线型对于在阻抗介质中作匀速运动的物体，能使蒙受的阻力最小。卵圆虽说是最初被世人所观察和认识到的许多事物之一，而且在近代科学文献中，我们常有机会遇到卵圆的术语，但是，它是迄至今日在数学领域中最后获得研究的一类数学曲线。

几个世纪以来，世界上许许多多的数学家曾经对各种各样的曲线作过广泛而给人深刻印象的研究和探索。然而令人惊愕的是，他们就是没有能够对这本小书中所论及的规范卵圆进行过任何系统的研究，虽然别的非正则的卵形线曾经被讨论过，如大家知道的笛卡儿卵形线，它是 *Rene Descartes* (1596—1650) 在寻求设计一种能够完美地使光线聚焦的透镜时的研究中发现的，还有一个就是 *Jean-Dominique Cassini* (1625—1712) 所提出的卡什尼卵形线（普通的双纽线）。在一般的情况下，这两种非正则卵形线的直角坐标方程都是四次方程，而规范卵圆则没有这种限制。最为重要的是，阻碍数学家们研究这类规范卵圆的困难在于，他们没有能够建立起卵圆的确切的定义，更不用说是应用幂变换的概念来认识卵圆同圆的本质联系。因此，在过去漫长的年代里，

在解析几何与微积分学中，卵圆的研究全然是一块空白。

适当地思考自然界通过卵圆给予我们的启发和指导，人们就能够在更为广泛的各个领域中增添他们的崇高的知识力量。因此，在本书中我们初步的目的之一，是在坐标几何中提出最为重要的相关于规范卵圆定义的概念，以及在微积分学中提出卵圆积分的蕴涵，并且试图把它们作为生动的题材来处理。这里，我们希望把这一主题的处理作为一种萌芽期的、然而也是较为深入的和更为系统的研究，它或许有助于引导我们的注意力到可能是更有希望的道路。

卵圆的主题是解析几何学中的一门新的分支。正如圆锥曲线一样，它的本身也仅仅是属于初等数学的范畴。尽管如此，它的好些部分却深深地卷入了高等数学的领域中。

合乎逻辑地，卵圆的研究大概还是应该按照在坐标几何中应用的传统的途径与探索方法来进行。否则，我们就不可能探究出卵圆图象的性质。只有当我们成功地弄清楚了卵圆的基本性质后，我们才能够继续发展出更为新颖的概念，转移到高等数学的领域中。

我们将会清楚地看到，卵圆的研究是同幂的动力状态观念交织在一起的，因此它在增进高中同学与高等院校学生的逻辑思维方面，将证明是最有帮助的。人类文明史告诉我们，人们智能的进展是与不断的、力所能胜任的新知识的结合紧密相关的。卵圆在解析几何与微积分学中的引进，将会使它们洋溢着青春的活力，这是毫无疑问的。我们深信，卵圆的研究，不但能够获得技术上的实际应用，而且能够激励人们对它的兴趣。

二、卵圆的概念

设x为平面上一条直线，O为直线上一定点，取任一点P，想象它在平面上运动，而且它到O的距离跟它到x轴线的距离的s次方幂之比为常数。当点P如此运动时所画出的曲线叫做卵圆。直线x叫做卵圆的准线，准线上的定点O叫做卵圆的极点。

卵圆的定义：如果平面上一个动点到一条定直线上的一个定点的距离，和到定直线的距离的s次幂之比是一个定数，这个动点的轨迹叫做卵圆.

三、卵圆方程的推出

我们根据卵圆的定义来建立它的标准方程.

取卵圆的准线为x轴，并使y轴过卵圆的极点O，设$P(x,y)$为曲线上的任意一点，MP为从P到x轴的垂线（图1）.

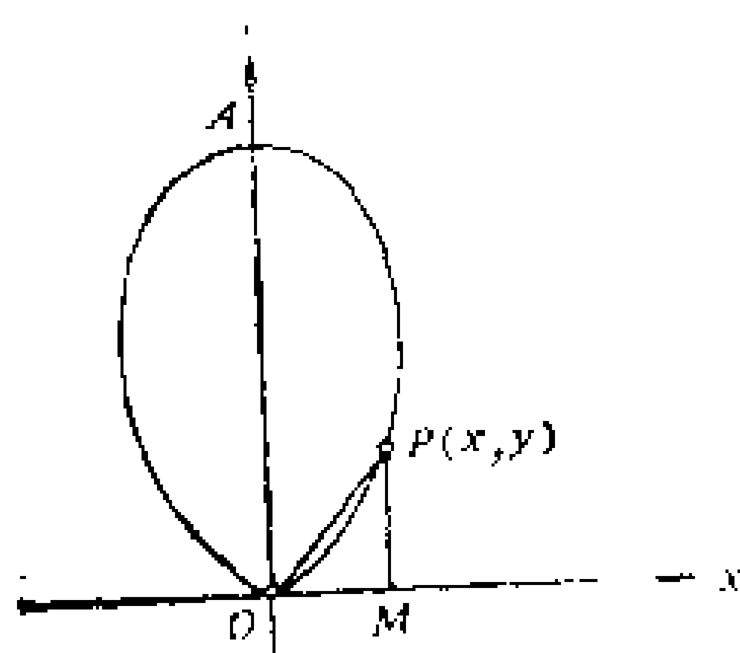


图 1

于是有

$$OP=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$MP=y$$

设距离MP的幂指数为s，根据卵圆的定义：

$$\frac{OP}{\overline{MP}^s}=k$$

或

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y^s}=k \tag{1}$$

式中k为常数（正数）.

两边平方，得

$$x^2+y^2=k^2y^{2s} \tag{2}$$

令$E=k^{1/s}$，式（2）化为

$$x^2+y^2=(Ey)^{2s} \tag{3}$$

这就是卵圆的方程.

设y轴与卵圆相交于点A，A与极点O在y轴上所截的线段叫做卵圆的纵轴，并用a代表.

在式（3），令$x=0$，可得

$$y^2=(Ey)^{2s}$$

这一方程的解$y=0$对应于极点，而$y=E^{\frac{s}{1-s}}$对应于纵轴OA，因此

$$a=E^{\frac{s}{1-s}} \qquad (4)$$

为方便起见，我们引入符号$n=\frac{s}{1-s}$，或$s=\frac{n}{1+n}$，得

$$a=E^{n} \qquad (5)$$

或

$$E=a^{\frac{1}{n}} \qquad (6)$$

于是，我们获得参数E的几何意义。E的n次幂在数值上等于纵轴a。

根据上述见解，式（3）可以写成

$$x^{2}+y^{2}=(a^{\frac{1}{n}}y)^{\frac{2n}{n+1}} \qquad (7)$$

这就是卵圆的标准方程。方程中的数n叫做卵圆的卵指数（*ovalic ndex*）。

四、根据标准方程研究卵圆的形状

卵圆的标准方程具有形式：

$$x^2+y^2=(a^{\frac{1}{n}}y)^{\frac{2n}{n+1}} \tag{7}$$

如果我们不知道式（7）所表达的新函数是从哪里来的，那么，首先就发生了研究由这一函数所描绘的曲线的问题。我们现在就研究这样的曲线。

式（7）仅包含x的平方项，因此，曲线关于y轴是对称的，我们只要研究曲线在y轴右侧部分就够了。

我们现在确定卵圆存在的x和y的变化范围。

就x解式（7），有

$$x=\pm\sqrt{\left(a^{\frac{1}{n}}y\right)^{\frac{2n}{n+1}}-y^2} \tag{8}$$

从这个关系式，可以知道

$$(a^{\frac{1}{n}}y)^{\frac{2n}{n+1}}\geqslant y^2$$

否则，原方程没有实根。

从上式可得

$$0\leqslant y\leqslant a$$

所以函数$\pm\sqrt{\left(a^{\frac{1}{n}}y\right)^{\frac{2n}{n+1}}-y^2}$的存在域是$0\leqslant y\leqslant a$。于是，曲线上所有的点都位于两平行直线$y=0$和$y=a$之间的长条域内。

因为式（7）左边的各项不可能为负，并且二项之和等于$(a^{\frac{1}{n}}y)^{\frac{2n}{n+1}}$，所以其中各项均不大于$(a^{\frac{1}{n}}y)^{\frac{2n}{n+1}}$，由此得

$$x^2\leqslant(a^{\frac{1}{n}}y)^{\frac{2n}{n+1}}$$

显然可见，使卵圆存在的y值在某一区间.

就y微分式（7），得

$$\frac{dx}{dy}=\pm\frac{\frac{n}{n+1}a^{\frac{2}{n+1}}y^{\frac{n-1}{n+1}}}{\sqrt{\left(a^{\frac{1}{n}}y\right)^{\frac{2n}{n+1}}-y^{2}}} \tag{9}$$

x为驻值（*stationary*），当$\frac{dx}{dy}=0$，或

$$\frac{n}{n+1}a^{\frac{2}{n+1}}y^{\frac{n-1}{n+1}}-y=0$$

解之，得

$$y=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}a \tag{10}$$

代入式（8），化简后得

$$x=\pm\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}a \tag{11}$$

这就是说，曲线上所有的点都位于两条平行直线

$x=-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}a$和$x=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}a$之间的长条域内.

因此，整个曲线位于前述的两个长条域相交而成的矩形之内.

现在探求卵圆在坐标轴上的截距. 因为式（7）不包含常数项，所以曲线通过原点. 在式（7）中，设$x=0$，即得$y=a$.因此，曲线与y轴相交于两点（0，0）和（0，a）.

曲线上任意一点的切线的斜率，可由式（9）得出

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{\sqrt{\left(a^{\frac{1}{n}}y\right)^{\frac{2n}{n+1}}-y^{2}}}{\frac{n}{n+1}a^{\frac{2}{n+1}}y^{\frac{n-1}{n+1}}-y} \tag{12}$$

求过卵圆极点的切线的斜率，将$y=0$代入式（12）中，得

$$\frac{dy}{dx}=0$$

因此，在点（0，0）的切线的斜率为零，即切线平行于x轴，而与x轴重合。

因为曲线关于y轴是对称的，只要给出它在第一象限的部分就够了。所以我们只研究x和y的正值。

自原点出发，设y由$y=0$连续地增加到$y=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}a$，那么，$x$也跟着从$x=0$增加到$x=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}a$，点$P(x,y)$描绘出对应于点$O(0,0)$和$B\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}a,\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}a\right]$之间的图象（图2）。在点$B$，$x$有极大值，曲线的切线平行于$y$轴。当$y$连续地由$y=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}a$增加到$y=a$，那么，$x$也跟着自其极限值$x=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}a$减小到$x=0$，点$P(x,y)$描绘出对应于点$B$和$A$（$0,a$）之间的图象。用几何的语言来说，就是点$P$（$x,y$）从原点出发向右移动，曲线往上走一直到点$B$，然后点$P$（$x,y$）自右向左移动，曲线继续往上走一直到点$A$。显然，卵圆是封闭的曲线，位于平面的上半部。

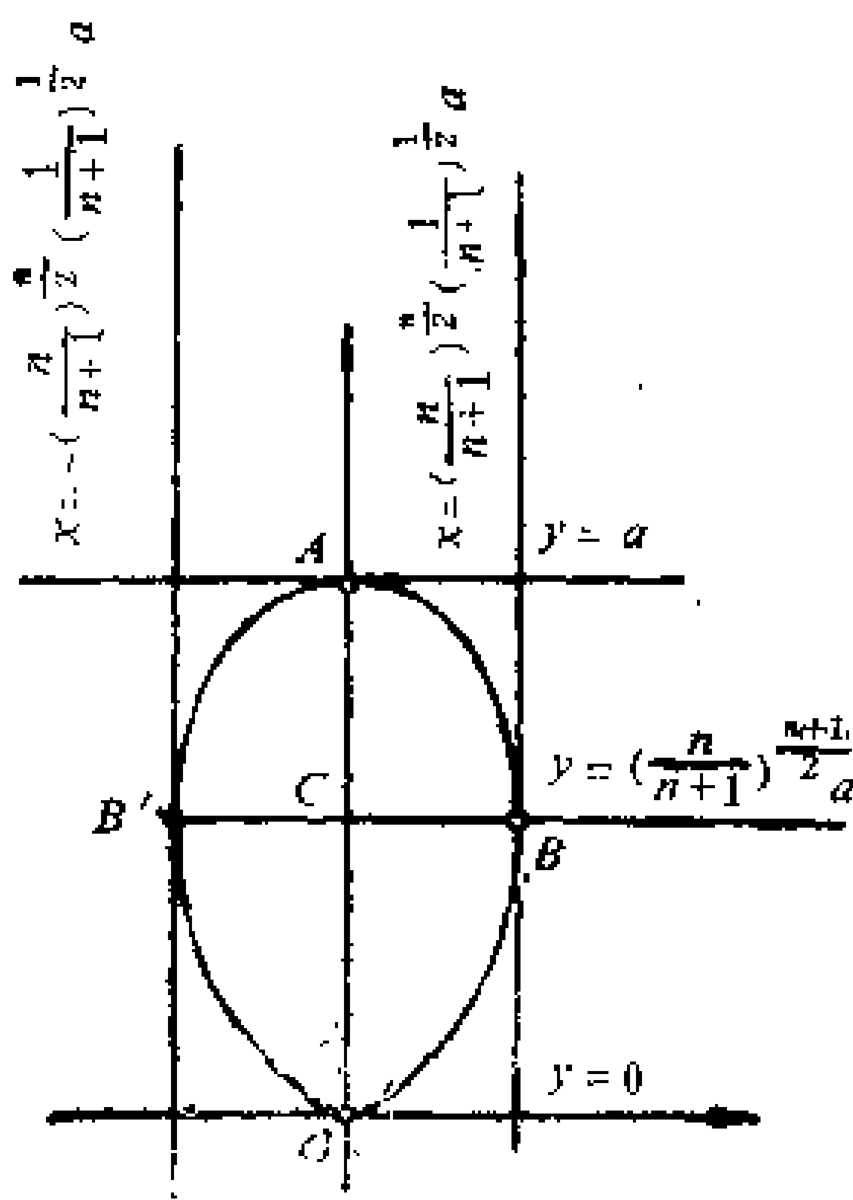


图 2

然而，应当注意到，在$y\leqslant 0$时，还可以描绘出另外一个卵圆，它是$y\geqslant 0$时的卵圆对x轴的镜面反射图象，因为据定义，卵圆的极点在其准线上，动点可以在准线的任何一侧按

同一绝对值的常数比而描绘曲线。

如图 2 所示，平行于x轴的线段BB'叫做卵圆的横轴，$|BB'|=2b$，b叫做卵圆的横半轴。卵圆在横轴上方的部分叫做卵圆头部，在横轴下方的部分叫做卵圆尾部。最高点A叫做卵圆的顶点或前锋。纵轴与横轴的交点叫做卵圆的轴心。线段OC和AC分别叫做卵圆的尾轴和头轴。

顺便提一下，从对卵圆斜率的研究中，适当选择卵指数n(唯一的值)，可使自卵圆顶点A发出，而指向横轴端点B及B'的射线，经四次反射后仍然回到A点，并在纵轴上形成两个汇聚点，其中上一个点叫做二次汇聚点，因为同一射线的光路在返抵卵圆顶点A时，两次过该点。

五、卵圆作为圆周按单位直径长度向圆周上一个极点的幂收缩或幂膨胀

设a是圆的直径，O是圆上的一个点．取圆在点O的切线为x轴，过点O的直径为y轴（图3）．于是，圆的方程具有形式：

$$x^2 + y^2 = ay \qquad (13)$$

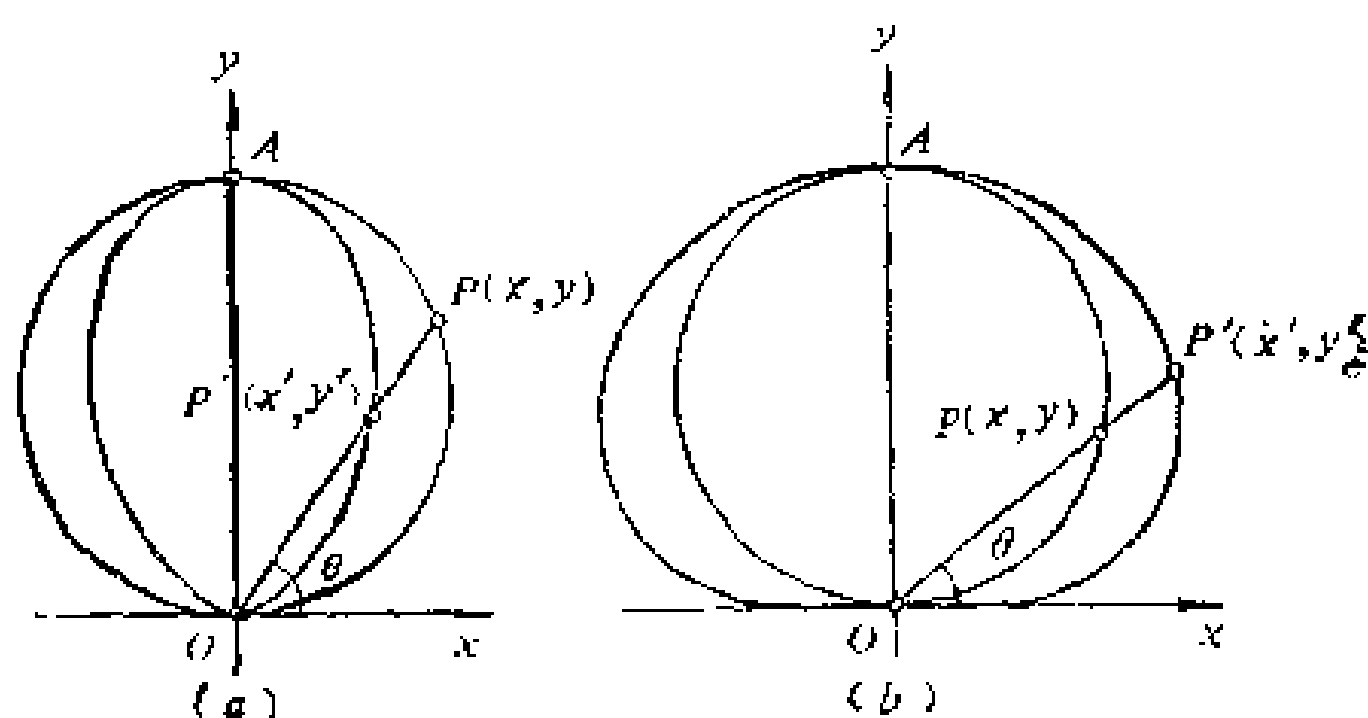


图 3

设P（x，y）是圆上的任意一点，那么点P的矢径（辐射弦）是

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

当矢径OP依n次幂而收缩（或膨胀）时，点P位移到新的位置P'，但角度θ保持不变．于是，新点P'的矢径定义为

$$r' = a\left(\frac{r}{a}\right)^n \qquad (14)$$

这种变换叫做曲线向极点的幂变换（*the exponential transformation of a curve with respect to a pole*）．

设x'和y'是旧点P位移到新点P'后的坐标，于是

$$r'=\sqrt{x'^2+y'^2}$$

今以r'和r之值代入式（14）中，得

$$\sqrt{x'^2+y'^2}=a\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}\right)^n$$

两边平方，得

$$x'^2+y'^2=a^2\left(\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)^n$$

或据式（13），得

$$x'^2+y'^2=a^{2-n}y^n \tag{15}$$

为要消去y，即用新点P'的坐标x'、y'表示旧点P的坐标x、y，我们注意到关系式

$$\frac{y}{x}=\frac{y'}{x'} \qquad 或\frac{y}{y'}=\frac{x}{x'}$$

因为θ未变。

令$\dfrac{y}{y'}=\dfrac{x}{x'}=\tau$，可得

$$y=\tau y',\quad x=\tau x' \tag{16}$$

平方后相加，得

$$x^2+y^2=\tau^2(x'^2+y'^2)$$

或

$$\tau^2=\frac{x^2+y^2}{x'^2+y'^2}=\frac{ay}{x'^2+y'^2}=\frac{a\tau y'}{x'^2+y'^2}$$

由此立即得出

$$\tau=\frac{ay'}{x'^2+y'^2}$$

代入式（16），得

$$x=\frac{ax'y'}{x'^2+y'^2},\quad y=\frac{ay'^2}{x'^2+y'^2}$$

今以y之值代入式（15），可得

$$x'^2+y'^2=a^{2-n}\left(\frac{ay'^2}{x'^2+y'^2}\right)^n$$

化简得

$$x'^2+y'^2=(a^{\frac{1}{n}}y')^{\frac{2n}{n+1}}$$

舍去撇号，最后得

$$x^2+y^2=(a^{\frac{1}{n}}y)^{\frac{2n}{n+1}} \qquad (7)$$

它正是如前所述的卵圆的标准方程。

我们推导卵圆方程的圆$x^2+y^2=ay$，叫做卵圆的参考圆.

当$n=1$时，式（7）化为

$$x^2+y^2=ay$$

就是直径为a的圆，可见圆不过是卵圆的一种特殊情况.

从本节的讨论中，可以看到，“卵圆作为圆周按单位直径长度向圆周上一个极点的幂收缩或幂膨胀’的概念，同第二节中卵圆的定义是完全等价的。

从上面的讨论也可以看出，仅是对圆施加幂变换后，即可得出一类变化多端的所谓“纵卵圆与扁卵圆”的图象。事实上，这种幂变换的概念尚可应用到其他某些曲线上，例如，以椭圆的长轴（或短轴）的顶点作为极点，使椭圆按单位长轴（或短轴）长度向该极点作幂收缩或幂膨胀时，我们可以得到比卵圆复杂得多的四种卵化椭圆（*ovalic ellipses*）图象；因此，幂变换的概念有可能给几何图象的研究提供新的可行性。另外，这种幂变换的概念还可直接应用到直角坐标的变换上，给坐标变换提供了新的内容；由于题材的限制，我们就不在这里对极富趣意的幂坐标的变换加以论述了。

六、卵圆的卵形率

卵圆常有各种不同的形状：比较纵长的和比较扁平的。卵圆的形状可以用一个数来表征。例如，卵圆的纵轴与横轴的比值，就可用作这样的数。然而，表征卵圆的形状时，最好是用卵圆的尾轴OC对横半轴BC的比值，这个比值叫做卵圆的卵形率（*ovality*），记作σ。

$$\sigma = \frac{OC}{BC}$$

显然，如前所述

$$OC = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}} a$$

$$BC = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} a$$

代入，得

$$\sigma = \sqrt{n} \tag{17}$$

显然可见，卵形率σ 是一个大于零的纯数。从这里，我们可以看到卵指数n的一个方面的数学意义，它等于过卵圆横轴端点的矢径OB（或OB'）的斜率的平方值。例如，卵指数为 4 的卵圆，即$r = a\sin^4\theta$的尾轴长度OC为横半轴OB 的$\sqrt{n} = \sqrt{4} = 2$倍。

我们现在来研究n值的变化对卵圆图象的影响。

当n自$n = 1$连续地增加到∞时，尾轴$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}} a$由$\frac{1}{2}a$延伸到$a$，同时横半轴$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} a$由$\frac{1}{2}a$缩短到0。卵圆就这样地沿纵

轴方向“拉伸”。在极限情况下，当 n 无限增大时，卵圆蜕化成与纵轴重合的线段。因此，当$n>1$时，卵圆叫做纵卵圆（*prolate oval*）。

当n自$n=1$连续地减小到 0（严格地说，n不能为零，而只能是无限地趋近于零的正无穷小）时，尾轴$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}a$由$\frac{1}{2}a$压缩到$0$，同时横半轴$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}a$由$\frac{1}{2}a$伸展到$a$，卵圆就这样地在极点“平展”开来。在极限情况下，当n无限地趋近于零时，卵圆膨胀成一个半圆，这时卵尾部蜕化为零，而与卵圆横轴重合。这时的横轴称为半圆的底径。因此，当$0<n<1$时，卵圆叫做扁卵圆（*oblate oval*）。

可以证明，有相同卵形率（或卵指数）的卵圆彼此相似。

七、极坐标　卵圆的方程

在笛卡尔坐标下，卵圆的方程具有形式

$$x^2+y^2=\left(a^{\frac{1}{n}}y\right)^{\frac{2n}{n+1}} \tag{7}$$

现在求卵圆在极坐标下的方程．

设

$$x=r\cos\theta$$
$$y=r\sin\theta \tag{17}$$

代入式（7），得

$$r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta=\left(a^{\frac{1}{n}}r\sin\theta\right)^{\frac{2n}{n+1}}$$

利用$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$，化简，得

$$r=a\sin^n\theta \tag{18}$$

可以看到，卵圆的标准方程，在极坐标下具有最简单的形式．

卵圆的极坐标方程，也可以从幂变换的基本定义直接导出．今以a为直径作圆，与直线x相切于O，并设P为圆上的任意一点（图4）．于是，点P的矢径是

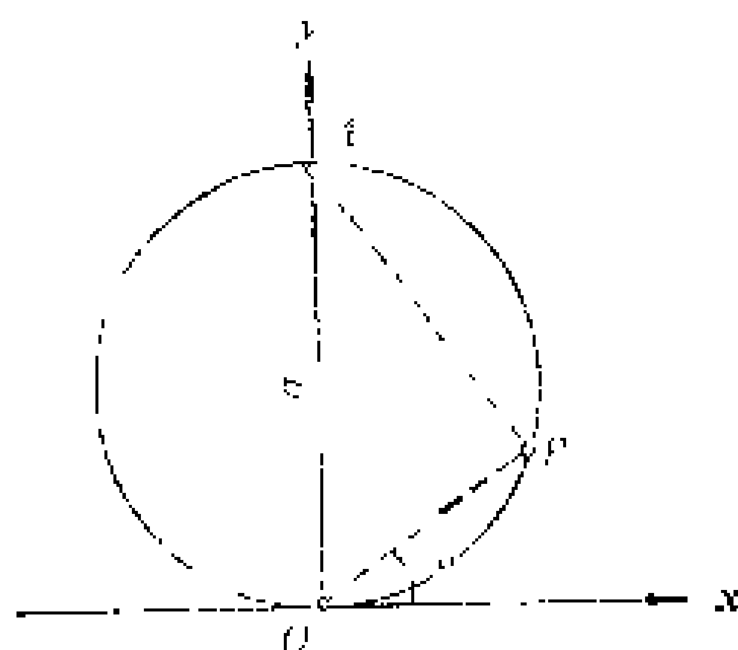


图 4

$$OP=a\sin\theta$$

其中θ是OP与极轴所组成的角．

回忆幂变换中卵圆的定义，就可以得出

$$r=a\left(\frac{OP}{a}\right)^n=a\left(\frac{a\sin\theta}{a}\right)^n$$

就是

$$r=a\sin^n\theta$$

这个方程正是前面所述式（18）的卵圆的极坐标方程.

据以前的讨论，可知卵圆的类型取决于参数n的数值：

当$n>1$时，这个方程代表纵卵圆；

当$n=1$时，这个方程代表圆；

当$0<n<1$时，这个方程代表扁卵圆.

这样，我们可重行将卵圆定义如下：

从圆上一个定点发出的辐射弦，当按单位直径而作幂收缩时，全部变形弦端点的集合叫做纵卵圆. 另一方面，当辐射弦按单位直径而作幂膨胀时，全部变形弦端点的集合叫做扁卵圆.

有时采用卵圆的参数方程，更较方便. 为此，将$r=a\sin^n\theta$代入直角坐标（x,y）和极坐标（r,θ）之间的关系式，得

$$\begin{cases} x=a\sin^n\theta\cos\theta \\ y=a\sin^{n+1}\theta \end{cases} \tag{19}$$

这是卵圆的参数方程，其中极角θ是参数.

从式（19）中消去参数θ，可得直角坐标下的方程.

显然，当θ由0变到π时，点$P(x,y)$描绘出完整的曲线.

当给出卵圆的参数方程后，由$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$，我们可以求出卵圆的斜率.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\theta}&=an\sin^{n-1}\theta\cos^2\theta-a\sin^{n+1}\theta\\ &=a\sin^{n-1}\theta[n-(n+1)\sin^2\theta]\end{aligned} \tag{20}$$

$$\frac{dy}{d\theta}=a(n+1)\sin^n\theta\cos\theta \tag{21}$$

相除，得

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{(n+1)\sin\theta\cos\theta}{n-(n+1)\sin^2\theta}\\ &=\text{任意一点的斜率}\end{aligned} \tag{22}$$

我们希望确定x为极大值时的θ值. 从式(22)可以立即看出，

这个一阶导数为无穷大，当

$$\sin^2\theta = \frac{n}{n+1}$$

即

$$\theta_x = \arcsin\sqrt{\frac{n}{n+1}} \tag{23}$$

时明显地给出x的极大值

由式（23），容易得

$$n = \mathrm{tg}^2\theta_x$$

这与从前讲过的卵指数n的一个方面的数学意义是一致的。

八、卵圆的作图法

从式（18）着手，按前述卵圆的定义，使简便地描绘出卵圆的图象成为可能，尽管它不是连续移动作图法。

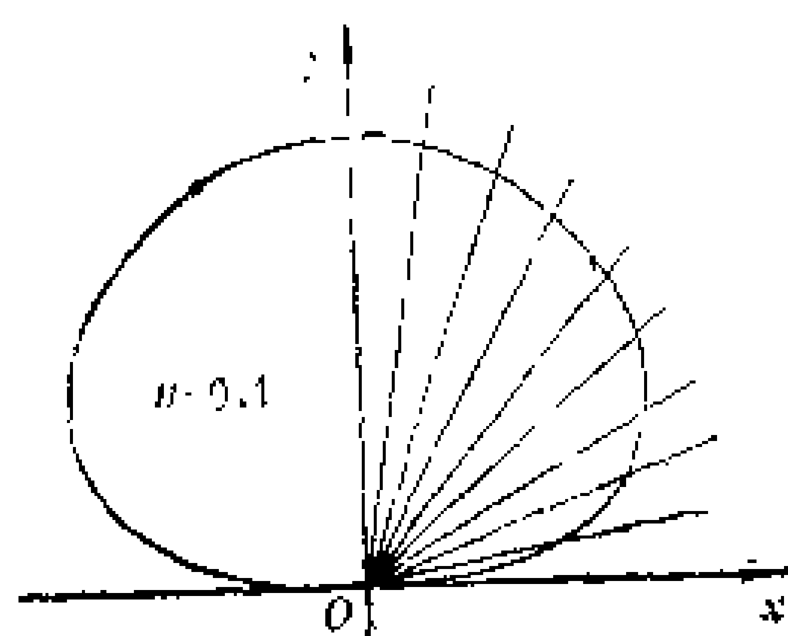


图 5

如图 5 选择坐标轴。曲线的左侧部分与右侧部分关于 y 轴对称，因此我们可以从点O引出许多射线 $\theta=\theta_j$，$\theta_{j+1}-\theta_j=\Delta\theta$，把平面的上半部第一象限分成若干彼此相等的小角度。给 θ 以任一值，利用对数计算出对应的 r 值，用每组的θ和r值，作为一点的坐标定出各点的位置，再用平滑的曲线连接各点，就得到所求的图象。

这样地描绘曲线的方法是基本的，有它的价值，但在一定情况下，它不一定是最简便的方法。

然而，可以料想到，当n是较小的整数时，我们可以作出新的设想。在这种情况下，下述方法证明是有用的；利用这种方法，不必计算出r的数值，就可简易地描绘出曲线的图象。

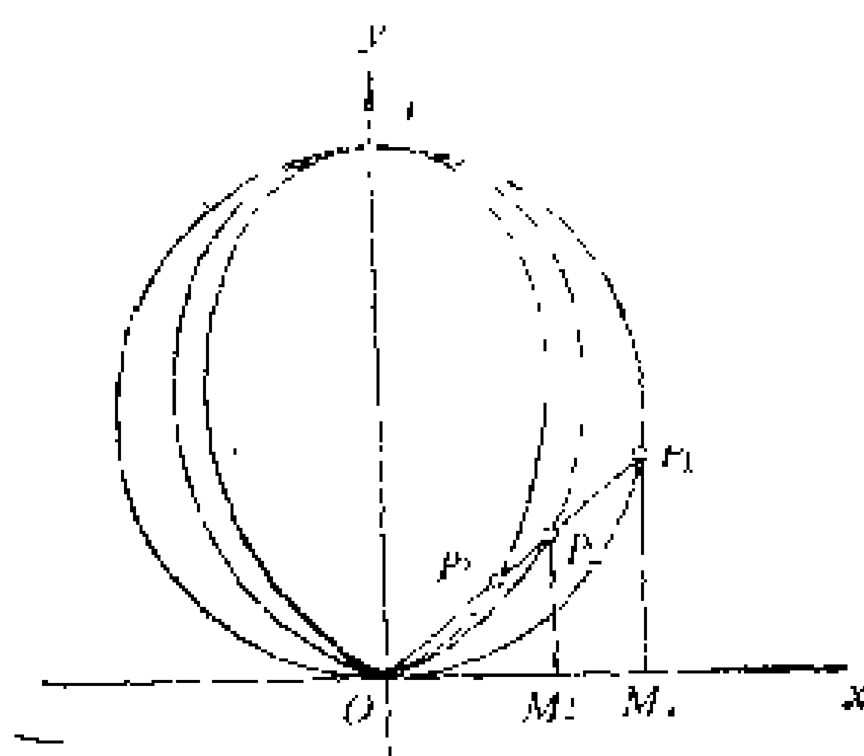


图 6

作一直径为a的圆。设x轴与圆相切于O，并且y轴过O（图6）。

从点 O，在第一象限引若干射线，使任意相邻两射线所成的角都相等，就是$\theta=\theta_j$，$\theta_{j+1}-\theta_j=\Delta\theta$。

设任一极角为θ 的射线与圆相交于点 P_1.由 P_1作x 轴的垂线 P_1M_1

于是

$$P_1M_1=OP_1\sin\theta$$
$$=a\sin^2\theta$$

以$OP_2=P_1M_1$为半径作弧，与射线 OP_1相交于 P_2. 用平滑的曲线连结所有的P_2型点，就得到卵指数为 2 的曲线.

由P_2作x轴的垂线P_2M_2.于是

$$P_2M_2=OP_2\sin\theta$$
$$=a\sin^3\theta$$

以$OP_3=P_2M_2$为半径作弧，与射线OP_2相交于P_3. 用平滑的曲线连结所有的P_3型点，就得到卵指数为 3 的曲线.

理论上，这种方法可以根据需要而重复应用。

解析的说法是：方程$r=a\sin^n\theta$的曲线上的任意一点 P_n，给出$r=a\sin^{n+1}\theta$的曲线上的一点P_{n+1}。反之，方程$r=a\sin^{n+1}\theta$的曲线上的任意一点P_{n+1}，给出$r=a\sin^n\theta$的曲线上的一点 P_n. 因此可以说，卵指数为n的卵圆方程的曲线，可以映射出卵指数为$n+1$或$n-1$的卵圆图象.

可是，有必要注意到，这种方法不仅适用于正整数n，也适用于分数值n.

如果给出的卵指数是真分数，比如0.75的卵圆方程的曲线，那么，利用刚才叙述的方法，就可顺次描绘出卵指数$n=0.75-1=-0.25$，-1.25，-2.25等的曲线. 这样，我们就把这种方法推广应用到n是负分数的情况，但这是一个细节问题，这里不再介绍了.

谈到卵圆的形态问题，我们可以顺便有趣地指出，尽管自然界的鸟卵赋予人们以卵圆的概念，然而它们并不呈现真正的数学卵圆形态，从一方面测算出的卵指数跟同另一方面测算出的卵指

数，并不完全符合，中间总是存在一定的、然而是较小的差异。值得指出的是，有极少数鸟卵在测试的精度范围内，竟然显示出非常完美的理论卵圆形态，这也许是“自然”这一造物者的巧意安排。对于鸭蛋和鹅蛋来说，它们的卵指数一般为$n=2.5\sim3.2$。这将为鸟卵学（*Oology*）提供有用的知识。

九、卵圆的纵弦

设UV是平行于y轴而与卵圆相交于两点U和V的任意直线，线段 UV叫做卵圆的纵弦（*longitudinal chord*,图 7）。我们现在求纵弦UV的中点 M (X,Y) 的轨迹。

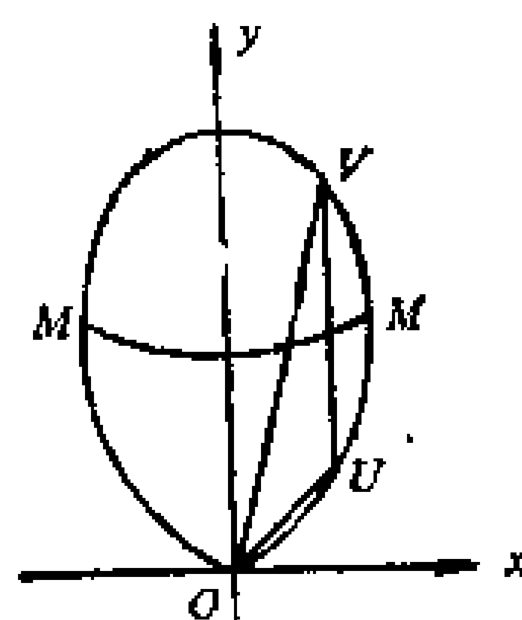


图 7

卵圆的参数方程具有形式

$$\begin{cases} x = a\sin^{n}\theta\cos\theta \\ y = a\sin^{n+1}\theta \end{cases}$$

设θ_1和θ_2分别是矢径OU和OV与x轴所成的角。因为点M的Y值是对应点U和V的y的两个数的平均值，因此，对于点M

$$\begin{cases} X = a\sin^{n}\theta_2\cos\theta_2 \\ Y = \dfrac{a(\sin^{n+1}\theta_1 + \sin^{n+1}\theta_2)}{2} \end{cases} \tag{24}$$

其中θ_1和θ_2可以看作由下式联系的两个参数，

$$\left(\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}\right)^{n} = \frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1} \tag{25}$$

因为$X = a\sin^{n}\theta_1\cos\theta_1 = a\sin^{n}\theta_2\cos\theta_2$

式(24)和(25)可联立地作为纵弦UV的中点轨迹MM的参数方程。

显然，当卵圆是纵卵圆时，曲线MM向上凹，当卵圆是扁卵圆时，曲线MM向下凹．因此，轨迹MM叫做卵圆的挠线(*flexor*)。

然而，往往最好是用一个参数来表达挠线的X和Y的方程。

因为θ_1绝不会大于θ_2，可令

$$\sin\theta_1=\sin\psi\sin\theta_2 \tag{26}$$

又

$$\cos\theta_1=\sqrt{1-\sin^2\theta_1}=\sqrt{1-\sin^2\psi\sin^2\theta_2}$$

于是，由式（25），我们有

$$\sin^n\psi=\sqrt{\frac{1-\sin^2\theta_2}{1-\sin^2\psi\sin^2\theta_2}}$$

两边平方，化简得

$$\sin^2\theta_2=\frac{1-\sin^{2n}\psi}{1-\sin^{2n+2}\psi}$$

就是 $\sin\theta_2=\sqrt{\dfrac{1-\sin^{2n}\psi}{1-\sin^{2n+2}\psi}}$

由此 $\cos\theta_2=\sqrt{\dfrac{\sin^{2n}\psi-\sin^{2n+2}\psi}{1-\sin^{2n+2}\psi}}$

$$=\frac{\sin^n\psi\cos\psi}{\sqrt{1-\sin^{2n+2}\psi}}$$

又由式（26）

$$\sin\theta_1=\sin\psi\sqrt{\frac{1-\sin^{2n}\psi}{1-\sin^{2n+2}\psi}}$$

代入式（24），最后得

$$\begin{cases} X=a\sin^n\psi\cos\psi\left(\dfrac{1-\sin^{2n}\psi}{1-\sin^{2n+2}\psi}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\dfrac{1}{1-\sin^{2n+2}\psi}\right)^{\frac{1}{2}} \\ Y=\dfrac{a}{2}(1+\sin^{n+1}\psi)\left(\dfrac{1-\sin^{2n}\psi}{1-\sin^{2n+2}\psi}\right)^{\frac{n+1}{2}} \end{cases} \tag{27}$$

这就是卵圆的挠线的参数方程，其中ψ是参数.

很明显，在挠线的两端，两点U和V变为重合，而角$\theta_1=\theta_2=\theta$，由此，$\sin\psi=1$

在挠线的一端，即当$\sin\psi=1$时，式

$$\sin^2\theta=\frac{1-\sin^{2n}\psi}{1-\sin^{2n+2}\psi}$$

具有未定式$\frac{0}{0}$.因此，就分子和分母各微分一次，得

$$\lim\sin^2\theta=\lim\frac{-2n\sin^{2n-1}\psi\cos\psi}{-(2n+2)\sin^{2n+1}\psi\cos\psi}$$

$$=\frac{n}{n+1}.$$

就是 $$\theta=\arcsin\sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

我们再次得到式（23）的结果.

当$n=1$，式(27)化为最简单的情况

$$Y=\frac{a}{2}(1+\sin^2\psi)\left(\frac{1-\sin^2\psi}{1-\sin^4\psi}\right)$$

就是 $$Y=\left|\frac{a}{2}\right|$$

可以料想到，这是参考圆的直径.

十、卵圆的一般方程

极点在原点的卵圆的标准方程具有形式：

$$x^2+y^2=(a^{\frac{1}{n}}y)^{\frac{2n}{n+1}} \tag{7}$$

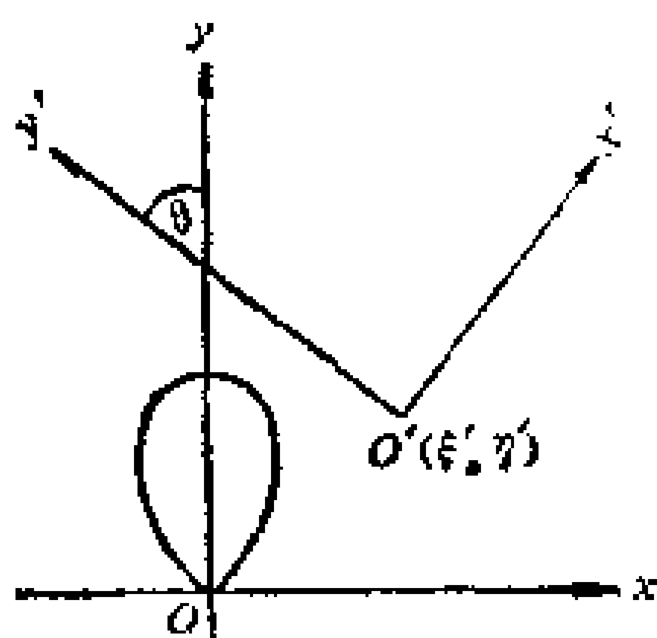


图 8

我们考虑一般的情况，如图 8 所示．设坐标系xOy经平移旋转变换为新坐标系$x'O'y'$，旋转角度为α，新坐标系的原点O'在旧坐标系xOy中的坐标为（ξ,η）．这时变换公式就是

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

即
$$\begin{cases}x=\xi+x'\cos\alpha-y'\sin\alpha\\y=\eta+x'\sin\alpha+y'\cos\alpha\end{cases}$$

代入式（7），我们有

$$(\xi+x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)^2+(\eta+x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)^2$$
$$=[a^{\frac{1}{n}}(\eta+x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)]^{\frac{2n}{n+1}}$$

展开左边括号，整理后，得

$$x'^2+y'^2+2(\xi\cos\alpha+\eta\sin\alpha)x'$$
$$+2(\eta\cos\alpha-\xi\sin\alpha)y'+(\xi^2+\eta^2)$$
$$=(a^{\frac{1}{n}}x'\sin\alpha+a^{\frac{1}{n}}y'\cos\alpha+a^{\frac{1}{n}}\eta)^{\frac{2n}{n+1}} \tag{28}$$

或舍去撇号，就得到下面的形式

$$x^2+y^2+2Ax+2By+C=(Dx+Ey+F)^m \tag{29}$$

这个方程就是卵圆的一般方程，其中

$$A = \xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha$$

$$B = \eta\cos\alpha - \xi\sin\alpha$$

$$C = \xi^2 + \eta^2$$

$$D = a^{\frac{1}{m}}\sin\alpha$$

$$E = a^{\frac{1}{m}}\cos\alpha$$

$$F = a^{\frac{1}{m}}\eta$$

$$m = \frac{2n}{n+1}$$

从上述关系式，可得

$$A^2 + B^2 = C$$

$$n = \frac{m}{2-m}$$

$$(D^2 + E^2)^{\frac{m}{2}} = a$$

$$\xi = \frac{AE - BD}{\sqrt{D^2 + E^2}}$$

$$\eta = \frac{AD + BE}{\sqrt{D^2 + E^2}}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{D}{E}$$

可以看到，卵圆的一般方程的特征是，左端是一个条件二次式，其中 x^2和 y^2的系数均为1，并且缺少xy项，常数项等于一次项系数之半的平方和，而右端是一个线性式的 m（$0<m<2$）次幂。

十一、有缺项的卵圆方程

考察卵圆的一般方程：

$$x^2+y^2+2Ax+2By+C=(Dx+Ey+F)^n \qquad (29)$$

式（29）的左式一般说来包含五项，而右端的线性式包含三项．很明显，x^2和y^2项的系数相等，且一般等于一．

如果左式中有缺项时，式（29）可以化为如下三种不同情况中的一种形式．

情况Ⅰ　缺少常数项，就是$C=0$，在这种情况下没有x和y项，因为$A^2+B^2=C$，从而$A=B=0$．于是，卵圆的极点同原点重合，而右端线性式中的常数项变为零，就是$F=0$．

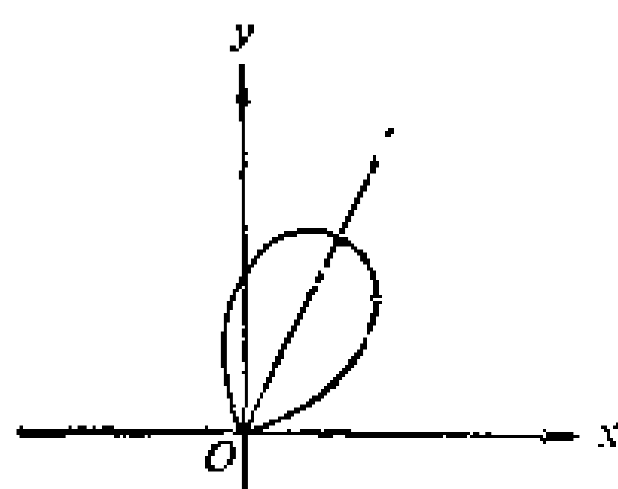


图 9

然后，式（29）具有形式

$$x^2+y^2=(Dx+Ey)^n$$

于是，我们看到，卵圆的极点位于原点，并且卵圆纵轴的方位，取决于右端线性式中x和y的系数（图 9）．

情况Ⅱ　左端二次式中缺少含x的项，就是$A=0$，那么，在这种情况下，不是$\alpha=0$。或$180°$，$\xi=0$，就是$\alpha=90°$或$270°$，$\eta=0$，于是有两种类型必须加以区别（图10）．

类型 1　卵圆的纵轴平行于x轴，而它的极点在y轴上，且极点到原点的距离为B．于是式（29）中$D=O$．此外式中存在关系$F=EB$．

然后，式（29）具有形式

$$x^2+y^2+2By+B^2=(Ey+EB)^n$$

类型 2　卵圆的纵轴平行于y轴，而它的极点在x轴上，且极点到原点的距离为B。于是式（29）中$E=F=0$。

然后，式（29）具有形式

$$x^2+y^2+2By+B^2=(Dx)^n$$

情况Ⅱ　左端二次式中缺少含y的项，就是$B=0$，那么，在这种情况下，不是$\alpha=0$。或$180°$，$\eta=0$，就是$\alpha=90°$或$270°$，$\xi=0$，于是有两种类型必须加以区别（图11）。

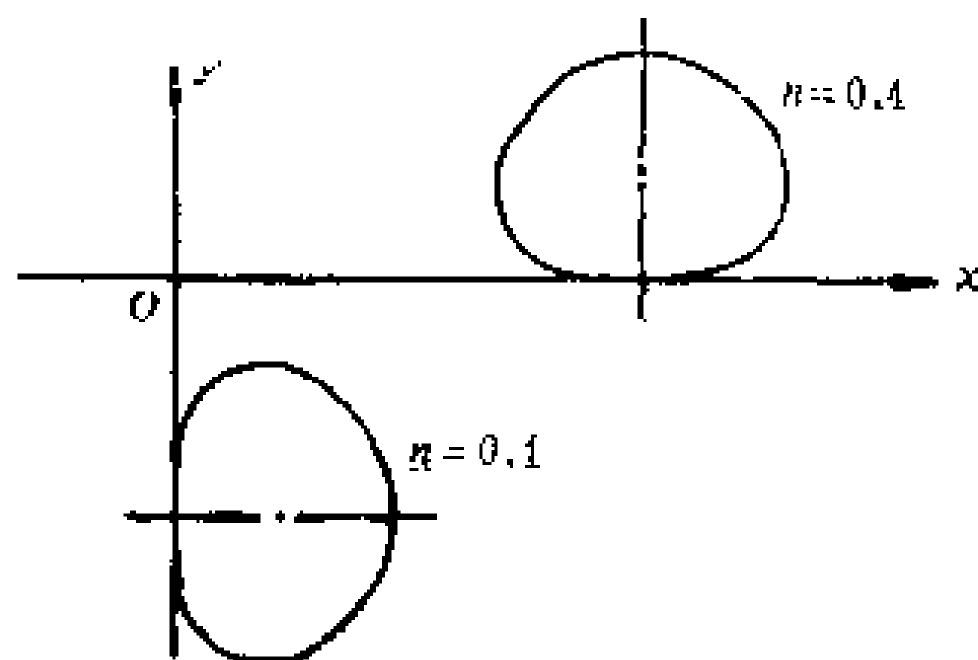


图 10

类型 1　卵圆的纵轴同x轴重合，且它的极点到原点的距离为A，于是方程右边的线性式中x的系数和常数项为零，就是$D=F=0$。

然后，式（29）具有形式

$$x^2+y^2+2Ax+A^2=(Ey)^n$$

类型 2　卵圆的纵轴同y轴重合，且其极点到原点的距离为A，于是，方程右边的线性式中y项的系数为零，就是$E=0$。此外、式中还存在关系$F=DA$。

然后，式（29）具有形式

$$x^2+y^2+2Ax+A^2=(Dx+DA)^n$$

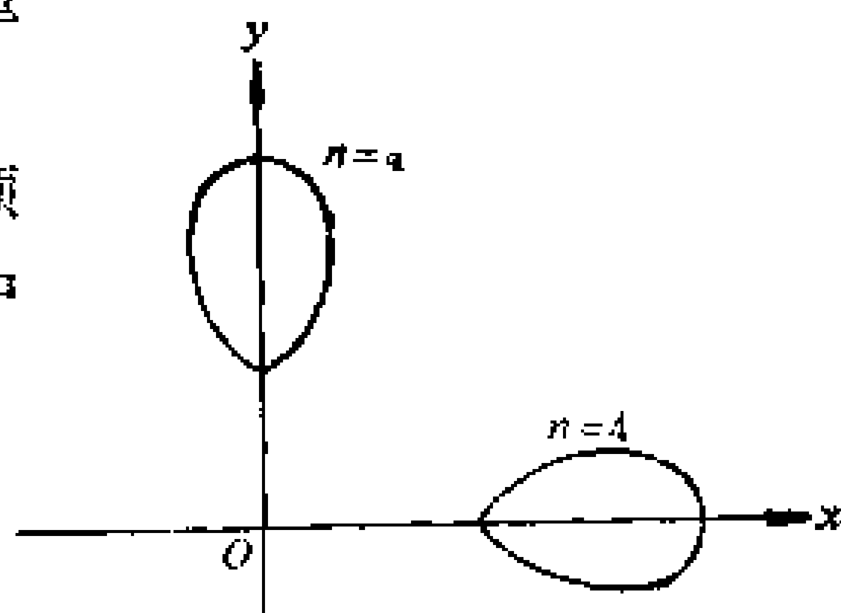


图 11

十二、卵 球

我们考察极点在原点的形如下式的卵圆方程

$$x^2+z^2=(a^{\frac{1}{n}}z)^{\frac{2n}{n+1}}$$

现在希望建立卵圆的旋转曲面的方程.

卵圆绕纵轴旋转描出的旋转曲面的方程，可用$\sqrt{x^2+y^2}$代替卵圆方程中的x而容易地得到，于是我们有

$$x^2+y^2+z^2=(a^{\frac{1}{n}}z)^{\frac{2n}{n+1}} \tag{30}$$

这就是定义为卵球的方程（图12）.

如卵圆是绕准线旋转而形成曲面时，那么，旋转曲面的方程将具有形式

$$x^2+y^2+z^2=a^{\frac{1}{n+1}}(y^2+z^2)^{\frac{n}{n+1}}$$

这式等同于

$$(x^2+y^2+z^2)^{n+1}=a(y^2+z^2)^n \tag{31}$$

这个方程是卵截面盲环(*blind toroid with oval section*)的方程，我们这里不讨论它了.

在本章中，我们只注意讨论卵球。

卵球体的曲面显然是范围有限的；曲面上的任意一点$P(x,y,z)$满足下列不等式：

$$|x|\leqslant\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}a$$

$$|y|\leqslant\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}a$$

$$|z| \leqslant a$$

显然，卵球与过纵轴的平面相交而成的截线是卵圆。

任一平面，$y=$ 定数，比如 k，与卵球体曲面割截而成的形状，由式（30），具有方程

$$x^2+z^2+k^2=\left(a^{\frac{1}{n}}z\right)^{\frac{2n}{n+1}}$$

假定

$$|k|<\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}a$$

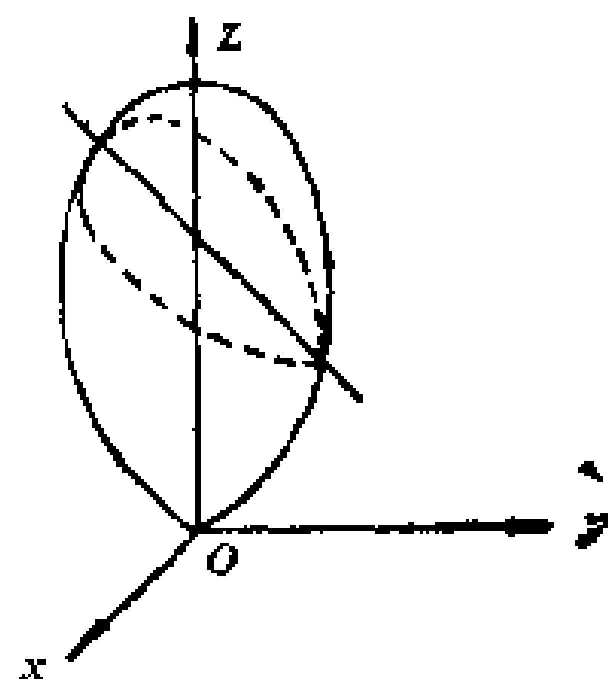


图 12

把这式同卵圆的一般方程（29）比较，可以看出，上述截面不是卵圆，尽管它具有与蛋的纵截面相类似的形状。由此，我们得出结论，平行于卵球体纵轴但不过纵轴的平面截割卵球面而得的截线，不是卵圆。

同样，卵球面与过母卵圆的轴心，并且垂直于纵轴的平面的截线是一个大圆周，这个大圆的半径显然是

$$R=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}a$$

任何其他不过轴心的平行平面与卵球面的截线是圆周，叫做小圆。

如果用与纵轴倾斜的任意平面与卵球面截割，截线的方程可如下推出。

平移坐标系xyz到新原点（0，0，ζ），这里$\zeta<a$，然后把中间坐标系绕新的x轴旋转角度γ。令$y=0$，得出具有如下形式的平面曲线方程

$$x^2+z^2+2\zeta z\cos\gamma+\zeta^2$$
$$=\left(a^{\frac{1}{n}}z\cos\gamma+a^{\frac{1}{n}}\zeta\right)^{\frac{2n}{n+1}}$$

把这个方程与式（29）比较，我们看到卵圆的必要条件

$$A^2+B^2=C$$

不能得到满足，因为

$$\zeta^2>(\zeta\cos\gamma)^2$$

所以这个平面截线不是卵圆，尽管它也具有与蛋的纵截面相类似的形状。因此，我们特地把这类形状叫做伪卵圆（*pseudo ovals*）。所以，任意平面与卵球表面截割而得到的截线是卵圆，圆或伪卵圆。

十三、卵圆的渐屈线

一条曲线的渐屈线是该曲线的曲率中心的轨迹。

纵轴为 a 和极点为（0,0）的卵圆的参数方程是

$$\begin{cases} x = a\sin^n\theta\cos\theta \\ y = a\sin^{n+1}\theta \end{cases}$$

就参数方程微分，得

$$\frac{dx}{d\theta} = a\sin^{n-1}\theta[n-(n+1)\sin^2\theta]$$

$$\frac{dy}{d\theta} = a(n+1)\sin^n\theta\cos\theta$$

因此

$$y' = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{(n+1)\sin\theta\cos\theta}{n-(n+1)\sin^2\theta}$$

再微分：

$$\frac{dy'}{d\theta} = \frac{(n+1)[n-(n-1)\sin^2\theta]}{[n-(n+1)\sin^2\theta]^2}$$

由此

$$y'' = \frac{\frac{dy'}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{(n+1)[n-(n-1)\sin^2\theta]}{a\sin^{n-1}\theta[n-(n+1)\sin^2\theta]^3}$$

用（α,β）表示曲率中心的坐标，我们有

$$
\left\{
\begin{aligned}
\alpha &= x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''} \\
&= \frac{an(n-1)\sin^n\theta\cos^3\theta}{(n-1)\sin^2\theta-n} \\
\beta &= y+\frac{1+y'^2}{y''} \\
&= \frac{an\sin^{n-1}\theta[\sin^2\theta(1+\cos^2\theta)+n^2\cos^4\theta]}{(n-1)[n-(n-1)\sin^2\theta]}
\end{aligned}
\right.
\tag{32}
$$

上述 α 和 β 的表达式，是卵圆渐屈线的参数方程.

视卵指数是大于 1 或小于 1，卵圆有两种根本不同类型的渐屈线.

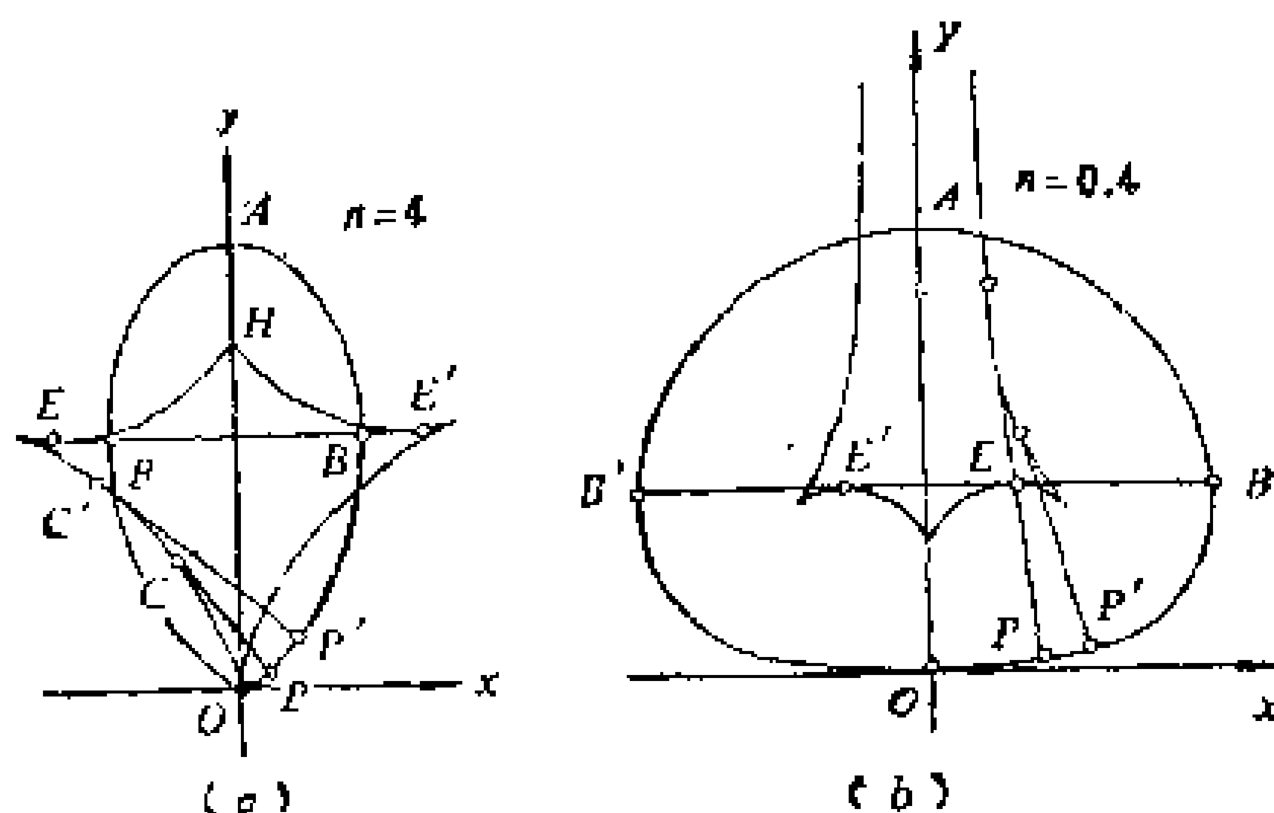


图 13

当 $n>1$ 时，卵圆的渐屈线如图 13-a. 我们看到 O,E,E',H 是曲线上对应的点 O,B,B',A 的曲率中心，而 C 和 C' 则对应于点 P,P'.

当 $n<1$ 时，卵圆的渐屈线如图13-b. E,E',H 是曲线上对应的点 B,B',A 的曲率中心，而 C,C' 则对应于点 P,P'.

当 $n=1$ 时，卵圆的渐屈线蜕变为与准线相距为 $a/2$ 的圆心.

我们可以有趣地注意到，当 n 只要稍大于 1 时，即便只要稍大正的无穷小量 δ，对应于极点的曲率中心就从 $a/2$ "跌落" 到

极点 O；而当 n 只要稍小于1时，对应于极点的曲率中心就从 $a/2$ "跃迁"到无穷高处。

因此，当 $n=1$ 时，卵圆渐屈线的方程有一间断点。

卵圆的极点 O，当 $n>1$ 时，实际上是一个零点（曲率半径 $R=0$）；当 $n<1$ 时，实际上是一个平点（曲率半径 $R=\infty$）。

对扁卵圆渐屈线的考察表明，在极点 O 附近的卵尾部具有汇聚法向射线成为近似平行的狭窄光束的性质。这启示我们，利用扁卵圆尾部的外形作为谐振腔中固态晶体激光材料的形状的可能性，这种谐振腔是用以使辐射波长频谱变化后，产生具有高度指向性（就是单色性好）的光。变更 n 的数值，我们可以获得，在不同距离处汇聚的高能传递效应。

十四、卵圆的周长和面积　第一类卵圆积分V(κ,θ)和第三类卵圆积分J(ε,θ)

卵圆的极坐标方程具有形式

$$r = a\sin^n\theta$$

现在考察卵圆的周长．在初等微积分中，曲线长是用下式表达

$$S=\int_0^\theta\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}d\theta$$

这里　　$$\frac{dr}{d\theta}=an\sin^{n-1}\theta\cos\theta$$

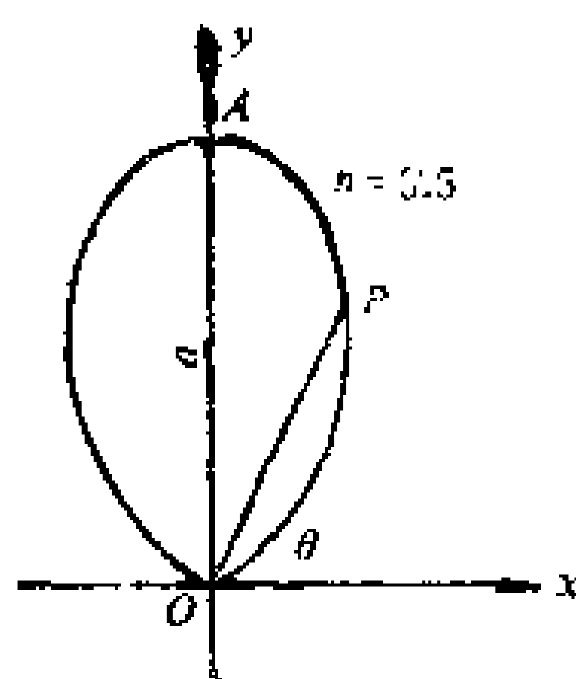


图 14

如图 14，当 θ 由 0 变到 θ 时，点 P 描绘出弧 OP．

代入，得

$$S=a\int_0^\theta\sin^{n-1}\theta[\sin^2\theta+n^2\cos^2\theta]^{\frac{1}{2}}d\theta \tag{33}$$

现在我们就卵圆为纵卵圆与扁卵圆两种情况，分别进行考察．

当卵圆为纵卵圆时，$n>1$，弧长可以写成

$$S=a\int_0^\theta\sin^{n-1}\theta[n^2-(n^2-1)\sin^2\theta]^{\frac{1}{2}}d\theta$$

$$= an\int_0^\theta \sin^{n-1}\theta\left(1-\frac{n^2-1}{n^2}\sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}d\theta$$

$$= an\int_0^\theta \sin^{n-1}\theta(1-k\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta \tag{34}$$

其中$k=\dfrac{n^2-1}{n^2}<1$，因为 $n>1$

于是，我们导出函数

$$V(k,\theta)=\int_0^\theta \sin^{n-1}\theta(1-k\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta \tag{35}$$

这就是第一类卵圆积分。我们看到，在这个被积函数中，包含正弦因子的 $n-1$ 次幂，与 *Legendre* 的第二类椭圆积分的被积函数的乘积。显然，这个积分不能用初等方法进行演算，但我们可以利用二项式级数，按照如下方式进行计算。

展开被积函数中的二项式，我们有

$$(1-k\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}k\sin^2\theta-\frac{1}{2!\,2^2}k^2\sin^4\theta-\frac{1\cdot3}{3!\,2^3}$$

$$\times k^3\sin^6\theta-\frac{1\cdot3\cdot5}{4!\,2^4}k^4\sin^8\theta-\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{5!\,2^5}k^5\sin^{10}\theta-\cdots. \tag{36}$$

代入式（35），得

$$V(k,\theta)=\int_0^\theta \sin^{n-1}\theta d\theta-\frac{1}{2}k\int_0^\theta \sin^{n+1}\theta d\theta$$

$$-\frac{1}{2!\,2^2}k^2\int_0^\theta \sin^{n+3}\theta d\theta-\frac{1\cdot3}{3!\,2^3}k^3\int_0^\theta \sin^{n+5}\theta d\theta$$

$$-\frac{1\cdot3\cdot5}{4!\,2^4}k^4\int_0^\theta \sin^{n+7}\theta d\theta-\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{5!\,2^5}k^5\int_0^\theta \sin^{n+9}\theta d\theta-$$

$$\cdots\cdots. \tag{37}$$

对于积分 $I_1=\int_0^\theta \sin^{n-1}\theta d\theta$.

令 $\sin\theta=t$，于是$\theta=\arcsin t$，$d\theta=(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}dt$，

$$\therefore \qquad I_1=\int_0^{\sin\theta} t^{n-1}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}dt \tag{38}$$

展开被积函数中的二项式，我们有

$$I_1=\int_0^{\sin\theta} t^{n-1}\left\{1+\frac{1}{2}t^2+\frac{1\cdot3}{2!\,2^2}t^4+\frac{1\cdot3\cdot5}{3!\,2^3}t^6+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{4!\,2^4}t^8\right.$$

$$\left.+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{5!\,2^5}t^{10}+\cdots\cdots\right\}dt$$

$$=\left\{\frac{t^n}{n}+\frac{1}{2}\ \frac{t^{n+2}}{(n+2)}+\frac{1\cdot3}{2!\,2^2}\ \frac{t^{n+4}}{(n+4)}+\frac{1\cdot3\cdot5}{3!\,2^3}\ \frac{t^{n+6}}{(n+6)}\right.$$

$$\left.+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{4!\,2^4}\ \frac{t^{n+8}}{(n+8)}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{5!\,2^5}\ \frac{t^{n+10}}{(n+10)}+\cdots\right\}_0^{\sin\theta}$$

$$=\sin^n\theta\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\ \frac{\sin^2\theta}{(n+2)}+\frac{1\cdot3}{2!\,2^2}\ \frac{\sin^4\theta}{(n+4)}+\frac{1\cdot3\cdot5}{3!\,2^3}\right.$$

$$\times\frac{\sin^6\theta}{(n+6)}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{4!\,2^4}\ \frac{\sin^8\theta}{(n+8)}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{5!\,2^5}$$

$$\left.\times\frac{\sin^{10}\theta}{(n+10)}+\cdots\cdots\right\}\tag{39}$$

令 $A_1=\frac{1}{2}$，$A_2=\frac{1\cdot3}{2!\,2^2}$，$A_3=\frac{1\cdot3\cdot5}{3!\,2^3}$，$A_4=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{4!\,2^4}$，

$$A_5=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{5!\,2^5},\cdots\cdots.$$

于是，式（39）可写成

$$I_1=\sin^n\theta\left\{\frac{1}{n}+\frac{A_1\sin^2\theta}{n+2}+\frac{A_2\sin^4\theta}{n+4}+\frac{A_3\sin^6\theta}{n+6}\right.$$

$$\left.+\frac{A_4\sin^8\theta}{n+8}+\frac{A_5\sin^{10}\theta}{n+10}+\cdots\cdots\right\}.\tag{40}$$

类似地，我们有

$$I_2=\int_0^\theta \sin^{n+1}\theta d\theta$$

$$=\sin^{n+2}\theta\left\{\frac{1}{n+2}+\frac{A_1\sin^2\theta}{n+4}+\frac{A_2\sin^4\theta}{n+6}+\frac{A_3\sin^6\theta}{n+8}\right.$$

$$+\frac{A_4\sin^8\theta}{n+10}+\frac{A_5\sin^{10}\theta}{n+12}+\cdots\cdots\Big\},$$

$$I_3=\int_0^\theta \sin^{n+3}\theta d\theta$$

$$=\sin^{n+4}\theta\Big\{\frac{1}{n+4}+\frac{A_1\sin^2\theta}{n+6}+\frac{A_2\sin^4\theta}{n+8}+\frac{A_3\sin^6\theta}{n+10}$$

$$+\frac{A_4\sin^8\theta}{n+12}+\frac{A_5\sin^{10}\theta}{n+14}+\cdots\cdots\Big\},$$

$$I_4=\int_0^\theta \sin^{n+5}\theta d\theta$$

$$=\sin^{n+6}\theta\Big\{\frac{1}{n+6}+\frac{A_1\sin^2\theta}{n+8}+\frac{A_2\sin^4\theta}{n+10}+\frac{A_3\sin^6\theta}{n+12}$$

$$+\frac{A_4\sin^8\theta}{n+14}+\frac{A_5\sin^{10}\theta}{n+16}+\cdots\cdots\Big\},$$

$$I_5=\int_0^\theta \sin^{n+7}\theta d\theta$$

$$=\sin^{n+8}\theta\Big\{\frac{1}{n+8}+\frac{A_1\sin^2\theta}{n+10}+\frac{A_2\sin^4\theta}{n+12}+\frac{A_3\sin^6\theta}{n+14}$$

$$+\frac{A_4\sin^8\theta}{n+16}+\frac{A_5\sin^{10}\theta}{n+18}+\cdots\cdots\Big\}$$

……

将 $I_1, I_2, I_3, \cdots\cdots$ 代入式（37），整理后，得

$$V(k,\theta)=\int_0^\theta \sin^{n-1}\theta(1-k\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta$$

$$=\sin^n\theta\Big\{\frac{1}{n}+(1-k)A_1\frac{\sin^2\theta}{n+2}+\left(A_2-A_1{}^2k-\frac{A_2k^2}{3}\right)\frac{\sin^4\theta}{n+4}$$

$$+\left(A_3-A_2A_1k-\frac{A_1A_2k^2}{3}-\frac{A_3k^3}{5}\right)\frac{\sin^6\theta}{n+6}$$

$$+\left(A_4-A_3A_1k-\frac{A_2A_2k^2}{3}-\frac{A_1A_3k^3}{5}-\frac{A_4k^4}{7}\right)\frac{\sin^8\theta}{n+8}$$

$$+\left(A_5-A_4A_1k-\frac{A_3A_2k^2}{3}-\frac{A_2A_3k^3}{5}-\frac{A_1A_4k^4}{7}-\frac{A_5k^5}{9}\right)\frac{\sin^{10}\theta}{n+10}$$

$$+\cdots\cdots\Big\}$$

$$=\sin^n\theta\left\{\frac{1}{n}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(A_m-\sum_{r=1}^{m}\frac{A_{m-r}A_rk^r}{2r-1}\right)\frac{\sin^{2m}\theta}{n+2m}\right\} \tag{41}$$

其中
$$A_p=\frac{\prod_{s=1}^{p}(2p-2s+1)}{p!\,2^p} \tag{42}$$

并规定
$$A_0=1。 \tag{43}$$

这就是第一类卵圆积分的计算公式，利用这个公式，根据需要的精确度，取有限项进行不完全卵圆积分的数值计算。

当上限 $\theta=\frac{\pi}{2}$时，叫做第一类全卵圆积分，记作

$$V=V\left(k,\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\theta(1-k\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta \tag{44}$$

在这种特殊情况下，我们可以对式（37）中的各项积分另作如下变换，例如，对于积分

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\theta d\theta$$

$$=\int_0^1 t^{n-1}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}dt$$

从式（38）

令　　$t^2=x$，于是$t=x^{\frac{1}{2}}$，$dt=\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2}dx$。

$$\therefore\quad I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{n}{2}-1}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$
=\frac{1}{2}B\left(\frac{n}{2},\ \frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}
$$

$$
=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \tag{45}
$$

类似地，我们有

$$
I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}\theta d\theta
$$

$$
=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}+1\right)}
$$

$$
=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\ \frac{n}{n+1}
$$

$$
I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+3}\theta d\theta
$$

$$
=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)},
$$

$$
I_4=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+5}\theta d\theta
$$

$$
=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\ \frac{n(n+2)(n\div 4)}{(n+1)(n+3)(n+5)},
$$

……。

$$\therefore \quad V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\theta\sqrt{1-k\sin^2\theta}\ d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\left\{1-\frac{n}{2(n+1)}k-\frac{n(n+2)}{2!\,2^2(n+1)(n+3)}k^2\right.$$

$$-\frac{1\cdot3n(n+2)(n+4)}{3!\,2^3(n+1)(n+3)(n+5)}k^3$$

$$\left.-\frac{1\cdot3\cdot5n(n+2)(n+4)(n+6)}{4!\,2^4(n+1)(n+3)(n+5)(n+7)}k^4-\cdots\cdots\right\}. \qquad (46)$$

于是，我们可以求得纵轴长度为 a 的纵卵圆（$n>1$）的周长

$$S=2nVa \qquad (47)$$

在以上推导出的纵卵圆周长的公式 $S=2nV(k,\pi/2)a$ 中，当 $k=0$ 时，纵卵圆蜕化为圆，直径为 a，S 即变为圆周长：

$$S=2nV(0,\pi/2)a=\pi a$$

故 $V(k,\pi/2)$ 可视为圆周率 π 在纵卵圆中的推广．我们称$V(k,\pi/2)$ 为"纵卵圆周率"，其中 $0<V(k,\pi/2)<\pi/2$．

应当注意，第一类卵圆积分是 n 的连续，有限的单值函数．可以看到，如果 n 的数值很大，就是 k 值接近 1 时，必须取很多项，才能得到相当精确的结果．然而，当 n 值较小时，展开的级数迅速收敛．无疑地，当 n 的数值较大时，第一类卵圆积分$V(k,\theta)$ 的运算是非常麻烦和耗费时间的．然而，在今日，这种计算方法可以采用自动计算技术来进行．因此，把计算所得结果列成数值表是有实用价值的．于是，象椭圆积分的情况，第一类卵圆积分也变成数值表函数．

为了增进有兴趣的读者对卵圆积分性质的了解，作为示例，在本书的第二十节编算有四类全卵圆积分数值表，供读者参考使用．至于不完全的卵圆积分数值表，因为内容浩繁，篇幅极为巨大，已远远超出本书的能力范围．

当卵圆为扁卵圆时，$0<n<1$，弧长可以写成

$$S=a\int_0^\theta \sin^{n-1}\theta\,[1-(1-n^2)\cos^2\theta\,]^{\frac{1}{2}}d\theta$$

$$=a\int_0^\theta \sin^{n-1}\theta(1-\varepsilon\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta \qquad (48)$$

其中 $0<\varepsilon=1-n^2<1$，因为 $0<n<1$。

于是，我们导出函数

$$\mathrm{J}(\varepsilon,\theta)=\int_0^\theta \sin^{n-1}\theta(1-\varepsilon\cos^2\theta\,)^{\frac{1}{2}}d\theta \qquad (49)$$

这就是第三类卵圆积分*。

展开被积函数中的二项式，我们有

$$\mathrm{J}(\varepsilon,\theta)=\int_0^\theta \sin^{n-1}\theta d\theta-\frac{1}{2}\varepsilon\int_0^\theta \sin^{n-1}\theta\cos^2\theta d\theta$$

$$-\frac{1}{2!\,2^2}\varepsilon^2\int_0^\theta \sin^{n-1}\theta\cos^4\theta d\theta-\frac{1\cdot3}{3!\,2^3}\varepsilon^3\int_0^\theta \sin^{n-1}\theta\cos^6\theta d\theta$$

$$-\frac{1\cdot3\cdot5}{4!\,2^4}\varepsilon^4\int_0^\theta \sin^{n-1}\theta\cos^8\theta d\theta$$

$$-\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{5!\,2^5}\varepsilon^5\int_0^\theta \sin^{n-1}\theta\cos^{10}\theta d\theta-\cdots\cdots \qquad (50)$$

令
$$\mathrm{I}_1=\int_0^\theta \sin^{n-1}\theta d\theta,$$

并令
$$B_1=\frac{1}{2},\quad B_2=\frac{1}{2!\,2^2},\quad B_3=\frac{1\cdot3}{3!\,2^3},$$

$$B_4=\frac{1\cdot3\cdot5}{4!\,2^4},\quad B_5=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{5!\,2^5},\quad \cdots\cdots$$

于是，上式可写成

---

* 第三类全卵圆积分 $\mathrm{J}(\varepsilon,\pi/2)$ 是由重庆大学数学系教授朱雅生解出的，故命名为J积分．在此基础上，经本书作者进一步改进、完善和推广，使之逻辑简并和通项公式化，从而得出第三类卵圆积分 $\mathrm{J}(\varepsilon,\theta)$ 的计算公式（54），以便进行不完全卵圆积分的数值计算。

$$J(\varepsilon,\theta)=I_1-B_1\varepsilon\int_0^\theta \sin^{n-1}\theta\cos^2\theta d\theta$$

$$-B_2\varepsilon^2\int_0^\theta \sin^{n-1}\theta\cos^4\theta d\theta-B_3\varepsilon^3\int_0^\theta \sin^{n-1}\theta\cos^6\theta d\theta$$

$$-B_4\varepsilon^4\int_0^\theta \sin^{n-1}\theta\cos^8\theta d\theta-B_5\varepsilon^5\int_0^\theta \sin^{n-1}\theta\cos^{10}\theta d\theta$$

$$-B_6\varepsilon^6\int_0^\theta \sin^{n-1}\theta\cos^{12}\theta d\theta-\cdots\cdots \tag{51}$$

应用分部积分法导出的三角递推公式

$$\int \sin^m x\cos^n x dx=\frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+n}+\frac{n-1}{m+n}\int \sin^m x\cos^{n-2}x dx$$

我们有

$$\int_0^\theta \sin^{n-1}\theta\cos^2\theta d\theta=\frac{\sin^n\theta\cos\theta}{n+1}+\frac{1}{n+1}\int_0^\theta \sin^{n-1}\theta d\theta$$

$$=\frac{\sin^n\theta\cos\theta}{n+1}+\frac{1}{n+1}I_1$$

$$\int_0^\theta \sin^{n-1}\theta\cos^4\theta d\theta=\frac{\sin^n\theta\cos^3\theta}{n+3}+\frac{3}{n+3}\int_0^\theta \sin^{n-1}\theta\cos^2\theta d\theta$$

$$=\frac{\sin^n\theta\cos^3\theta}{n+3}+\frac{3}{n+3}\left[\frac{\sin^n\theta\cos\theta}{n+1}+\frac{1}{n+1}I_1\right]$$

$$=\sin^n\theta\cos\theta\left[\frac{\cos^2\theta}{n+3}+\frac{3}{(n+1)(n+3)}\right]+\frac{1\cdot 3}{(n+1)(n+3)}I_1,$$

$$\int_0^\theta \sin^{n-1}\theta\cos^6\theta d\theta=\sin^n\theta\cos\theta\left[\frac{\cos^4\theta}{n+5}+\frac{5\cos^2\theta}{(n+3)(n+5)}\right.$$

$$\left.+\frac{3\cdot 5}{(n+1)(n+3)(n+5)}\right]+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{(n+1)(n+3)(n+5)}I_1,$$

$$\int_0^\theta \sin^{n-1}\theta\cos^8\theta d\theta=\sin^n\theta\cos\theta\left[\frac{\cos^6\theta}{n+7}+\frac{7\cos^4\theta}{(n+5)(n+7)}\right.$$

$$+\frac{5\cdot 7\cos^2\theta}{(n+3)(n+5)(n+7)}+\frac{3\cdot 5\cdot 7}{(n+1)(n+3)(n+5)(n+7)}\Bigg]$$

$$+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{(n+1)(n+3)(n+5)(n+7)}I_1,$$

$$\int_0^\theta \sin^{n-1}\theta\cos^{10}\theta d\theta=\sin^n\theta\cos\theta\Bigg[\frac{\cos^8\theta}{n+9}+\frac{9\cos^6\theta}{(n+7)(n+9)}$$

$$+\frac{7\cdot 9\cos^4\theta}{(n+5)(n+7)(n+9)}+\frac{5\cdot 7\cdot 9\cos^2\theta}{(n+3)(n+5)(n+7)(n+9)}$$

$$+\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{(n+1)(n+3)(n+5)(n+7)(n+9)}\Bigg]$$

$$+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{(n+1)(n+3)(n+5)(n+7)(n+9)}I_1,$$

……

将以上各积分代入式（51），整理后，得

$$J(\varepsilon,\theta)=\int_0^\theta \sin^{n-1}\theta(1-\varepsilon\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta$$

$$=I_1\Bigg\{1-B_1\varepsilon\cdot\frac{1}{n+1}-B_2\varepsilon^2\cdot\frac{1\cdot 3}{(n+1)(n+3)}-B_3\varepsilon^3$$

$$\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5}{(n+1)(n+3)(n+5)}-B_4\varepsilon^4\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{(n+1)(n+3)(n+5)(n+7)}$$

$$-B_5\varepsilon^5\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{(n+1)(n+3)(n+5)(n+7)(n+9)}-\cdots\cdots\Bigg\}$$

$$-\sin^n\theta\cos\theta\Bigg\{\Bigg[\frac{B_1\varepsilon}{n+1}+\frac{B_2\varepsilon^2}{n+3}\cos^2\theta+\frac{B_3\varepsilon^3}{n+5}\cos^4\theta+\frac{B_4\varepsilon^4}{n+7}\cos^6\theta$$

$$+\frac{B_5\varepsilon^5}{n+9}\cos^8\theta+\cdots\cdots\Bigg]+\frac{1}{n+1}\Bigg[B_2\varepsilon^2\cdot\frac{3}{n+3}+B_3\varepsilon^3\cdot\frac{3\cdot 5}{(n+3)(n+5)}$$

$$+B_4\varepsilon^4\cdot\frac{3\cdot 5\cdot 7}{(n+3)(n+5)(n+7)}+B_5\varepsilon^5$$

$$\cdot\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{(n+3)(n+5)(n+7)(n+9)}+\cdots\cdots\Bigg]+\frac{\cos^2\theta}{n+3}\Bigg[B_3\varepsilon^3\cdot\frac{5}{n+5}$$

$$+B_4\varepsilon^4\cdot\frac{5\cdot 7}{(n+5)(n+7)}+B_5\varepsilon^5\cdot\frac{5\cdot 7\cdot 9}{(n+5)(n+7)(n+9)}+\cdots\cdots\Big]$$

$$+\frac{\cos^4\theta}{n+5}\Big[B_4\varepsilon^4\cdot\frac{7}{n+7}+B_5\varepsilon^5\cdot\frac{7\cdot 9}{(n+7)(n+9)}+B_6\varepsilon^6$$

$$\cdot\frac{7\cdot 9\cdot 11}{(n+7)(n+9)(n+11)}+\cdots\cdots\Big]+\frac{\cos^6\theta}{n+7}\Big[B_5\varepsilon^5\cdot\frac{9}{n+9}$$

$$+B_6\varepsilon^6\cdot\frac{9\cdot 11}{(n+9)(n+11)}+B_7\varepsilon^7\cdot\frac{9\cdot 11\cdot 13}{(n+9)(n+11)(n+13)}$$

$$+\cdots\cdots\Big]+\cdots\cdots\Big\}$$

$$=\mathrm{I}_1\left\{1-\sum_{m=1}^{\infty}B_m\varepsilon^m\prod_{t=1}^{m}\frac{2t-1}{n+2t-1}\right\}$$

$$-\sin^n\theta\cos\theta\Big\{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{B_m\varepsilon^m}{n+2m-1}\cos^{2m-2}\theta$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos^{2m-2}\theta}{n+2m-1}\sum_{q=1}^{\infty}B_{m+q}\varepsilon^{m+q}\prod_{u=1}^{q}\frac{2m+2u-1}{n+2m+2u-1}\Big\}. \tag{52}$$

将

$$\mathrm{I}_1=\sin^n\theta\left\{\frac{1}{n}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_m\sin^{2m}\theta}{n+2m}\right\} \tag{53}$$

代入，从式（40），最后得

$$J(\varepsilon,\theta)=\sin^n\theta\Big\{\Big[\frac{1}{n}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_m\sin^{2m}\theta}{n+2m}\Big]\Big[1-$$

$$-\sum_{m=1}^{\infty}B_m\varepsilon^m\prod_{t=1}^{m}\frac{2t-1}{n+2t-1}\Big]-\cos\theta\Big[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{B_m\varepsilon^m}{n+2m-1}\cos^{2m-2}\theta$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos^{2m-2}\theta}{n+2m-1}\sum_{q=1}^{\infty}B_{m+q}\varepsilon^{m+q}\prod_{u=1}^{q}\frac{2m+2u-1}{n+2m+2u-1}\Big]\Big\} \tag{54}$$

其中 $$A_p=\frac{\prod_{s=1}^{p}(2p-2s+1)}{p!\ 2^p}$$

$$B_p = \frac{\prod_{s=1}^{p}(2p-2s+1)}{p!\ 2^p(2p-1)} \tag{55}$$

这就是第三类卵圆积分的计算公式

当上限 $\theta = \frac{\pi}{2}$时，叫做第三类全卵圆积分，记作

$$J = J\left(\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}\theta\,(1-\varepsilon\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}\,d\theta \tag{56}$$

$$\text{或}\ J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}\theta\, d\theta - \frac{1}{2}\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}\theta\cos^2\theta\, d\theta$$

$$-\frac{1}{2!\,2^2}\varepsilon^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}\theta\cos^4\theta\, d\theta - \frac{1\cdot 3}{3!\,2^3}\varepsilon^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}\theta\cos^6\theta\, d\theta$$

$$-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{4!\,2^2}\varepsilon^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}\theta\cos^8\theta\, d\theta - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{5!\,2^5}\varepsilon^5\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}\theta\cos^{10}\theta\, d\theta$$

$$-\cdots\cdots. \tag{57}$$

应用*Beta*函数的重要公式之一：

$$B(m,n) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta\, d\theta$$

我们有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}\theta\cos^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}B\left(\frac{n}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}+1\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{n+1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\ \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\cdot\frac{1}{n+1}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}\theta\cos^4\theta\, d\theta = \frac{1}{2}B\left(\frac{n}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+5}{2}\right)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{n+3}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\cdot\frac{1\cdot3}{(n+1)(n+3)},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\theta\cos^6\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{n}{2},\frac{7}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+7}{2}\right)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{n+5}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+5}{2}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5}{(n+1)(n+3)(n+5)},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\theta\cos^8\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{n}{2},\frac{9}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+9}{2}\right)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{n+7}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+7}{2}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{(n+1)(n+3)(n+5)(n+7)},$$

……

又由式（45），

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\theta\,d\theta=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

代入式（57），整理后，得

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\theta\sqrt{1-\varepsilon\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\left\{1-\frac{1}{2(n+1)}\varepsilon-\frac{1^2\cdot 3}{2!\,2^2(n+1)(n+3)}\varepsilon^2\right.$$

$$-\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5}{3!\,2^3(n+1)(n+3)(n+5)}\varepsilon^3$$

$$\left.-\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7}{4!\,2^4(n+1)(n+3)(n+5)(n+7)}\varepsilon^4-\cdots\cdots\right\} \tag{58}$$

式（58）也可从式（52）直接导出，当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，$\cos\theta=0$，于是

$$J\left(\varepsilon,\frac{\pi}{2}\right)=I_1\left\{1-\sum_{m=1}^{\infty}B_m\varepsilon^m\prod_{t=1}^{m}\frac{2t-1}{n+2t-1}\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\left\{1-\sum_{m=1}^{\infty}B_m\varepsilon^m\prod_{t=1}^{m}\frac{2t-1}{n+2t-1}\right\}$$

这个公式，显然同式（58）是完全一致的。

于是，我们可以求得纵轴长度为a的扁卵圆（$0<n<1$）的周长

$$S=2Ja \tag{59}$$

在以上推导出的扁卵圆周长公式$S=2J(\varepsilon,\pi/2)a$中，类似于纵卵圆，当 $\varepsilon=0$ 时，扁卵圆蜕化为圆，直径为 a，S 即变为圆周长：

$$S=2J(0,\pi/2)a=\pi a$$

故$J(\varepsilon,\pi/2)$同样可视为圆周率π在扁卵圆中的推广。我们称$J(\varepsilon,\pi/2)$为“扁卵圆周率”，其中$\pi/2<J(\varepsilon,\pi/2)<(1+\pi/2)$。

值得注意的是，扁卵圆周率与纵卵圆周率之间，存在着本质上的差别。扁卵圆周率等于扁卵圆周长与其纵轴之比的1/2，而纵卵圆周率则等于纵卵圆周长与其纵轴之比的$1/2n$。圆周率则径直等于圆周长与直径之比。

纵卵圆或扁卵圆蜕化为圆时，图象的性质存在一跃迁过程，而非连续性的变化，这一点已经在第十三节中卵圆的渐屈线的研究中，有着详细说明。

我们知道，当$n\to0$时，扁卵圆膨胀为一个半径为 a 的半圆形这个半圆形的周界等于半圆弧长与底径之和，即

$$S=\pi a+2a=(2+\pi)a$$

现在我们利用第三类全卵圆积分数值表来计算这个半圆形的周长。查表 2，当$n\to0$时，$J=2.57080$。

$$\therefore\quad S=2Ja=2\cdot2.57080a$$
$$=5.14159a$$

这与直接计算所得结果完全一致，这就证明了数表理论依据的正确性。当然，数值表并不是专用来计算这种简化了的特例，它是具有通用性的。

其次，让我们考虑卵圆$r=a\sin^n\theta$的面积。而为图象关于y轴对称，所以卵圆的面积$=OPA$面积的 2 倍。

因为当$\theta=0$时，$r=0$，我们看到，如果θ由0变到$\dfrac{\pi}{2}$时，矢径OP扫描出面积OPA。所以卵圆的面积

$$S=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\sin^n\theta)^2d\theta$$

$$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,a^2\cdot\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)}\tag{60}$$

验证此结果，令$n=1$，于是

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,a^2\cdot\frac{\Gamma\left(1\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)}$$

$$=\frac{1}{4}\pi a^2$$

这是熟知的直径为a的圆的面积。

十五、卵球的表面积和体积　第二类卵圆积分$\mathrm{I}(\kappa,\theta)$和第四类卵圆积分$\mathrm{L}(\varepsilon,\theta)$

卵圆绕其纵轴旋转所形成的旋转曲面，就定义为卵球的表面。

设卵圆的方程具有形式

$$r = a\sin^{n}\theta$$

在极坐标下，当θ由0变到θ时，点P描出弧OP（图14），这个平面曲线OP绕y轴旋转一周所产生的面积是

$$S = 2\pi\int_{0}^{\theta} r\cos\theta\left[r^{2} + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^{2}\right]^{\frac{1}{2}} d\theta$$

这里　$\dfrac{dr}{d\theta} = an\sin^{n-1}\theta\cos\theta$

代入，得

$$S = 2\pi\int_{0}^{\theta} a\sin^{n}\theta\cos\theta\left[a^{2}\sin^{2n}\theta + \left(an\sin^{n-1}\theta\cos\theta\right)^{2}\right]^{\frac{1}{2}} d\theta$$

$$= 2\pi a^{2}\int_{0}^{\theta}\sin^{2n-1}\theta\cos\theta\left[\sin^{2}\theta + n^{2}\cos^{2}\theta\right]^{\frac{1}{2}} d\theta \qquad (61)$$

现在我们就卵球为纵卵球与扁卵球两种情况，分别进行考察。

当卵圆曲线OP是纵卵圆的弧长时，$n>1$，OP绕y轴旋转一周产生的侧面积可以写成

$$S = 2\pi a^{2}\int_{0}^{\theta}\sin^{2n-1}\theta\cos\theta\left[n^{2} - (n^{2}-1)\sin^{2}\theta\right]^{\frac{1}{2}} d\theta$$

$$= 2n\pi a^2\int_0^\theta \sin^{2n-1}\theta\cos\theta\left[1-\frac{n^2-1}{n^2}\sin^2\theta\right]^{\frac{1}{2}}d\theta$$

$$= 2n\pi a^2\int_0^\theta \sin^{2n-1}\theta\cos\theta(1-k\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta \tag{62}$$

其中 $k=\frac{n^2-1}{n^2}<1$，因为$n>1$。

于是，我们导出函数

$$I(k,\theta)=\int_0^\theta \sin^{2n-1}\theta\cos\theta(1-k\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta \tag{63}$$

这就是第二类卵圆积分。

展开被积函数中的二项式，我们有

$$I(k,\theta)=\int_0^\theta \sin^{2n-1}\theta\cos\theta d\theta-\frac{1}{2}k\int_0^\theta \sin^{2n+1}\theta\cos\theta d\theta$$

$$-\frac{1}{2!2^2}k^2\int_0^\theta \sin^{2n+3}\theta\cos\theta d\theta-\frac{1\cdot 3}{3!2^3}k^3\int_0^\theta \sin^{2n+5}\theta\cos\theta d\theta$$

$$-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{4!2^4}k^4\int_0^\theta \sin^{2n+7}\theta\cos\theta d\theta-\cdots\cdots$$

$$=\frac{\sin^{2n}\theta}{2n}-\frac{1}{2}k\cdot\frac{\sin^{2n+2}\theta}{2n+2}$$

$$-\frac{1}{2!2^2}k^2\cdot\frac{\sin^{2n+4}\theta}{2n+4}-\frac{1\cdot 3}{3!2^3}k^3\cdot\frac{\sin^{2n+6}\theta}{2n+6}$$

$$-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{4!2^4}k^4\cdot\frac{\sin^{2n+8}\theta}{2n+8}-\cdots\cdots$$

$$=\frac{\sin^{2n}\theta}{2}\left\{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}k\cdot\frac{\sin^2\theta}{n+1}-\frac{1}{2!2^2}k^2\cdot\frac{\sin^4\theta}{n+2}\right.$$

$$\left.-\frac{1\cdot 3}{3!2^3}k^3\cdot\frac{\sin^6\theta}{n+3}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{4!2^4}k^4\cdot\frac{\sin^8\theta}{n+4}-\cdots\cdots\right\} \tag{64}$$

这就是第二类卵圆积分的计算公式。

当上限 $\theta=\frac{\pi}{2}$时，叫做第二类全卵圆积分，记作

$$I = I\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1}\theta\cos\theta(1-k\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta \quad (65)$$

当 $\theta=\frac{\pi}{2}$时，$\sin\theta=1$，代入式（64），得

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1}\theta\cos\theta\sqrt{1-k\sin^2\theta}\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{n}-\frac{1}{2(n+1)}k-\frac{1}{2!\,2^2(n+2)}k^2\right. \\ &\quad -\frac{1\cdot3}{3!\,2^3(n+3)}k^3-\frac{1\cdot3\cdot5}{4!\,2^4(n+4)}k^4 \\ &\quad \left.-\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{5!\,2^5(n+5)}k^5-\cdots\cdots\right\} \end{aligned} \quad (66)$$

于是，我们可以求得纵轴长度为 a 的纵卵球（$n>1$）的表面积

$$S = 2n\pi I a^2 \quad (67)$$

当卵圆曲线OP是扁卵圆的弧长时，$0<n<1$，OP 绕y轴旋转一周产生的侧面积可以写成

$$\begin{aligned} S &= 2\pi a^2\int_0^{\theta}\sin^{2n-1}\theta\cos\theta[1-(1-n^2)\cos^2\theta]^{\frac{1}{2}}d\theta \\ &= 2\pi a^2\int_0^{\theta}\sin^{2n-1}\theta\cos\theta(1-\varepsilon\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta \end{aligned} \quad (68)$$

其中$0<\varepsilon=1-n^2<1$，因为$0<n<1$

于是，我们导出函数

$$L(\varepsilon,\theta) = \int_0^{\theta}\sin^{2n-1}\theta\cos\theta(1-\varepsilon\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta \quad (69)$$

这就是第四类卵圆积分。

展开被积函数中的二项式，我们有

$$L(\varepsilon,\theta) = \int_0^{\theta}\sin^{2n-1}\theta\cos\theta d\theta - \frac{1}{2}\varepsilon\int_0^{\theta}\sin^{2n-1}\theta\cos^3\theta d\theta$$

$$-\frac{1}{2!\,2^2}\varepsilon^2\int_0^{\theta}\sin^{2n-1}\theta\cos^5\theta d\theta - \frac{1\cdot3}{3!\,2^3}\varepsilon^3\int_0^{\theta}\sin^{2n-1}\theta\cos^7\theta d\theta$$

$$-\frac{1\cdot3\cdot5}{4!\,2^4}\varepsilon^4\int_0^\theta \sin^{2n-1}\theta\cos^9\theta d\theta-\cdots\cdots \tag{70}$$

令$B_1=\frac{1}{2}$，$B_2=\frac{1}{2!\,2^2}$，$B_3=\frac{1\cdot3}{3!\,2^3}$，

$B_4=\frac{1\cdot3\cdot5}{4!\,2^4}$，……

于是，上式可写成

$$L(\varepsilon,\theta)=\int_0^\theta \sin^{2n-1}\theta\cos\theta d\theta-B_1\varepsilon\int_0^\theta \sin^{2n-1}\theta\cos^3\theta d\theta$$

$$-B_2\varepsilon^2\int_0^\theta \sin^{2n-1}\theta\cos^5\theta d\theta-B_3\varepsilon^3\int_0^\theta \sin^{2n-1}\theta\cos^7\theta d\theta$$

$$-B_4\varepsilon^4\int_0^\theta \sin^{2n-1}\theta\cos^9\theta d\theta-\cdots\cdots \tag{71}$$

对各项分别积分，我们有

$$\int_0^\theta \sin^{2n-1}\theta\cos\theta d\theta=\frac{\sin^{2n}\theta}{2n},$$

$$\int_0^\theta \sin^{2n-1}\theta\cos^3\theta d\theta=\int_0^\theta \sin^{2n-1}\theta(1-\sin^2\theta)\cos\theta d\theta$$

$$=\int_0^\theta(\sin^{2n-1}\theta-\sin^{2n+1}\theta)\cos\theta d\theta$$

$$=\frac{\sin^{2n}\theta}{2n}-\frac{\sin^{2(n+1)}\theta}{2(n+1)},$$

$$\int_0^\theta \sin^{2n-1}\theta\cos^5\theta d\theta=\int_0^\theta \sin^{2n-1}\theta(1-\sin^2\theta)^2\cos\theta d\theta$$

$$=\int_0^\theta(\sin^{2n-1}\theta-C_2^1\sin^{2n+1}\theta+C_2^2\sin^{2n+3}\theta)\cos\theta d\theta$$

$$=\frac{\sin^{2n}\theta}{2n}-\frac{C_2^1\sin^{2(n+1)}\theta}{2(n+1)}+\frac{C_2^2\sin^{2(n-2)}\theta}{2(n+2)},$$

$$\int_0^\theta \sin^{2n+1}\theta\cos^7\theta d\theta=\int_0^\theta \sin^{2n+1}\theta(1-\sin^2\theta)^3\cos\theta d\theta$$

$$=\int_0^\theta(\sin^{2n-1}\theta-C_3^1\sin^{2n+1}\theta+C_3^2\sin^{2n+3}\theta-C_3^3\sin^{2n+5}\theta)\cos\theta d\theta$$

$$=\frac{\sin^{2n}\theta}{2n}-\frac{C_3^1\sin^{2(n+1)}\theta}{2(n+1)}+\frac{C_3^2\sin^{2(n+2)}\theta}{2(n+2)}-\frac{C_3^3\sin^{2(n+3)}\theta}{2(n+3)},$$

$$\int_0^\theta \sin^{2n-1}\theta\cos^8\theta d\theta=\int_0^\theta \sin^{2n-1}\theta(1-\sin^2\theta)^4\cos\theta d\theta$$

$$=\int_0^\theta(\sin^{2n-1}\theta-C_4^1\sin^{2n+1}\theta+C_4^2\sin^{2n+3}\theta-C_4^3\sin^{2n+5}\theta$$

$$+C_4^4\sin^{2n+7}\theta)\cos\theta d\theta$$

$$=\frac{\sin^{2n}\theta}{2n}-\frac{C_4^1\sin^{2(n+1)}\theta}{2(n+1)}+\frac{C_4^2\sin^{2(n+2)}\theta}{2(n+2)}-\frac{C_4^3\sin^{2(n+3)}\theta}{2(n+3)}$$

$$+\frac{C_4^4\sin^{2(n+4)}\theta}{2(n+4)},$$

……

将以上各式代入式（71），整理后，得

$$\mathrm{L}(\varepsilon,\theta)=\frac{\sin^{2n}\theta}{2n}(1-B_1\varepsilon-B_2\varepsilon^2-B_3\varepsilon^3-B_4\varepsilon^4-\cdots\cdots)$$

$$+\frac{\sin^{2(n+1)}\theta}{2(n+1)}(B_1\varepsilon C_1^1+B_2\varepsilon^2C_2^1+B_3\varepsilon^3C_3^1+B_4\varepsilon^4C_4^1$$

$$+\cdots\cdots)$$

$$-\frac{\sin^{2(n+2)}\theta}{2(n+2)}(B_2\varepsilon^2C_2^2+B_3\varepsilon^3C_3^2+B_4\varepsilon^4C_4^2+B_5\varepsilon^5C_5^2$$

$$+\cdots\cdots)$$

$$+\frac{\sin^{2(n+3)}\theta}{2(n+3)}(B_3\varepsilon^3C_3^3+B_4\varepsilon^4C_4^3+B_5\varepsilon^5C_5^3+B_6\varepsilon^6C_6^3$$

$$+\cdots\cdots)$$

$$-\frac{\sin^{2(n+4)}\theta}{2(n+4)}(B_4\varepsilon^4C_4^4+B_5\varepsilon^5C_5^4+B_6\varepsilon^6C_6^4+B_7\varepsilon^7C_7^4$$

$$+\cdots\cdots)+\cdots\cdots=\frac{\sin^{2n}\theta}{2}\left\{\frac{1}{n}\left[1-\sum_{m=1}^{\infty}B_m\varepsilon^m\right]\right.$$

$$\left.+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{\sin^{2m}\theta}{n+m}\sum_{i=m}^{\infty}B_m\varepsilon^mC_i^m\right\} \tag{72}$$

其中
$$B_m=\frac{\prod\limits_{s=1}^{m}(2m-2s+1)}{m!\,2^m(2m-1)}$$

这就是第四类卵圆积分的计算公式。

当上限 $\theta=\frac{\pi}{2}$时，叫做第四类全卵圆积分，记作

$$\begin{aligned}L&=L\left(\varepsilon,\frac{\pi}{2}\right)\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}\theta\cos\theta(1-\varepsilon\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta\end{aligned}\tag{73}$$

或
$$\begin{aligned}L=&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}\theta\cos\theta d\theta-\frac{1}{2}\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}\theta\cos^3\theta d\theta\\&-\frac{1}{2!\,2^2}\varepsilon^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}\theta\cos^5\theta d\theta-\frac{1\cdot3}{3!\,2^3}\varepsilon^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}\theta\cos^7\theta d\theta\\&-\frac{1\cdot3\cdot5}{4!\,2^4}\varepsilon^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}\theta\cos^9\theta d\theta-\cdots\cdots\end{aligned}\tag{74}$$

应用$Beta$函数的公式之一

$$B(m,n)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta d\theta$$

我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}\theta\cos\theta d\theta&=\frac{1}{2}B(n,1)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(n)\Gamma(1)}{\Gamma(n+1)}\\&=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(n)}{n\Gamma(n)}=\frac{1}{2n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}\theta\cos^3\theta d\theta&=\frac{1}{2}B(n,2)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(n)\Gamma(2)}{\Gamma(n+2)}\\&=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(n)}{n(n+1)\Gamma(n)}=\frac{1}{2n}\frac{1}{(n+1)},\end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}\theta\cos^5\theta d\theta = \frac{1}{2}B(n,3) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(n)\Gamma(3)}{\Gamma(n+3)}$$

$$= \frac{1}{2n}\frac{2!}{(n+1)(n+2)},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}\theta\cos^7\theta d\theta = \frac{1}{2}B(n,4)$$

$$= \frac{1}{2n}\frac{3!}{(n+1)(n+2)(n+3)},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}\theta\cos^9\theta d\theta = \frac{1}{2}B(n,5)$$

$$= \frac{1}{2n}\frac{4!}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)},$$

……

将以上各式代入式（74），整理后，得

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}\theta\cos\theta\sqrt{1-\varepsilon\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2n}\Big\{1 - \frac{1}{2(n+1)}\varepsilon - \frac{1}{2^2(n+1)(n+2)}\varepsilon^2$$

$$- \frac{1\cdot3}{2^3(n+1)(n+2)(n+3)}\varepsilon^3$$

$$- \frac{1\cdot3\cdot5}{2^4(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}\varepsilon^4 - \cdots\cdots\Big\} \qquad (75)$$

于是，我们可以求得纵轴长度为a的扁卵球（$0<n<1$）的表面积

$$S = 2\pi La^2 \qquad (76)$$

我们知道，当$n\to0$时，扁卵球膨胀为一个半径为a的半球体，这个半球体的表面积等于半球的球面积与半球体的底面积之和，即

$$S = 2\pi a^2 + \pi a^2$$

$$= 3\pi a^2$$

现在我们利用第四类全卵圆积分数值表，来计算这个半球体

的表面积。查表2，当$n\to0$时，$L=1.50000$。

$$\therefore\quad S=2\pi La^2$$
$$=9.42478a^2$$

这与直接计算所得结果完全一致，这同样证明了数表理论依据的正确性。

其次，让我们考虑卵球的体积。在极坐标下，卵圆的旋转体的体积为

$$V=\frac{2}{3}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}r^3\cos\theta d\theta$$

$$=\frac{2}{3}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\sin^n\theta)^3\cos\theta d\theta$$

$$=\frac{2}{3(3n+1)}\pi a^3 \tag{77}$$

当$n\to\infty$时，卵球收缩成一条长度为a的轴线段，

$$V=0$$

当$n=1$时，卵球化为一个直径为a的球体，

$$V=\frac{1}{6}\pi a^3$$

当$n\to0$时，卵球成为一个半径为a的半球体，

$$V=\frac{2}{3}\pi a^3$$

十六、卵圆的形心和转动惯量

设如图 15 选取坐标轴，并设卵圆的方程是

$$x^2+y^2=\left(a^{\frac{1}{n}}y\right)^{\frac{2n}{n+1}}$$

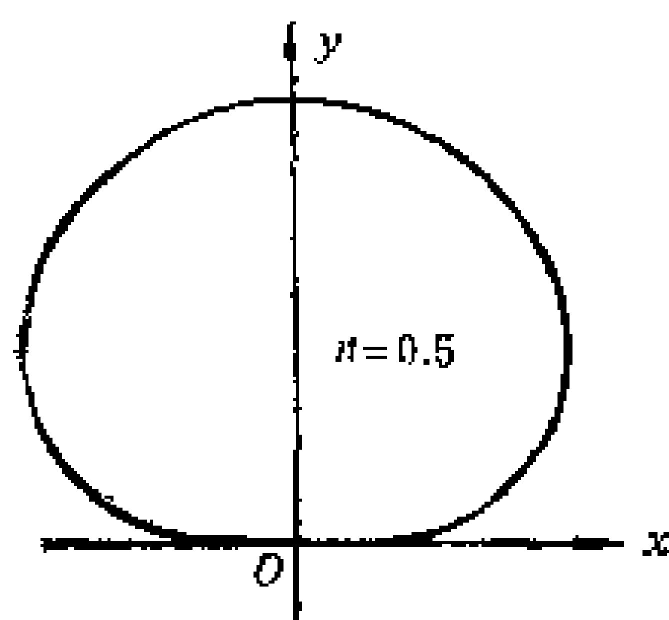


图 15

y 轴是对称轴，所以形心(*centroid*)的横坐标 $\bar{x}=0$。

卵圆对于 x 轴（即卵圆的准线）的面积矩(*the moment of area*)是

$$M_x=\iint_S y dS=2\int_0^a xy dy$$

$$=2\int_0^a\left[\left(a^{\frac{1}{n}}y\right)^{\frac{2n}{n+1}}-y^2\right]^{\frac{1}{2}}y dy$$

$$=2\int_0^a\left(a^{\frac{2}{n+1}}-y^{\frac{2}{n+1}}\right)^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2n+1}{n+1}}dy \qquad (78)$$

令 $y^{\frac{2}{n+1}}=a^{\frac{2}{n+1}}t$，于是

$$y=at^{\frac{n+1}{2}},dy=\frac{n+1}{2}at^{\frac{n-1}{2}}dt$$

因此

$$M_x=(n+1)a^3\int_0^1(1-t)^{\frac{1}{2}}t^{\frac{3n}{2}}dt$$

$$=(n+1)a^3B\left(\frac{3n+2}{2},\ \frac{3}{2}\right)$$

$$=(n+1)a^3\frac{\Gamma\left(\frac{3n+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3n+2}{2}+\frac{3}{2}\right)}$$

$$=\sqrt{\pi}\,a^3\cdot\frac{n}{(3n+1)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3n+1}{2}\right)} \qquad (79)$$

并且因为卵圆面积

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,a^2\cdot\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)}$$

从式（60），所以

$$\bar{y}=\frac{2n^2a}{(3n+1)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3n}{2}\right)\Gamma(n)}{\Gamma\left(\frac{3n+1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \qquad (80)$$

验证此结果，令$n=1$，于是

$$\bar{y}=\frac{2a}{(3+1)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{3+1}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{a}{2}$$，这是圆的半径．

我们现在来考察卵圆的转动惯量．在极坐标下，卵圆对于它的准线的转动惯量是

$$\mathrm{I}_x=\iint_S r^3\sin^2\theta\,dr\,d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\sin^n\theta}r^3\sin^2\theta\,dr\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{4n+2}\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{\pi}\,a^{4}\cdot\frac{\Gamma\left(2n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(2n+2)} \tag{81}$$

卵圆对于它的纵轴的转动惯量是

$$\mathrm{I}_{y}=\int_{S}\int r^{3}\cos^{2}\theta\,drd\theta$$

$$=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{a\sin^{2n}\theta}r^{3}\cos^{2}\theta\,drd\theta$$

$$=\frac{1}{2}a^{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{4n}\theta\cos^{2}\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{4}a^{4}B\left(2n+\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\sqrt{\pi}\,a^{4}\cdot\frac{\Gamma\left(2n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2n+2)} \tag{82}$$

卵圆对于它的极点的转动惯量是

$$\mathrm{I}_{o}=\mathrm{I}_{x}+\mathrm{I}_{y}=\frac{1}{4}\sqrt{\pi}\,a^{4}\cdot\frac{\Gamma\left(2n-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2n+1)} \tag{83}$$

顺便说一下，因为这类规范卵圆的大多数性质是同Gamma函数紧密相关的，所以可称之为Gamma卵圆，以便同其它两种非正则的仅含x和y的四次方程的笛卡儿卵形线与卡什尼卵形线相区别。

十七、卵球的形心和转动惯量

设卵球的方程具有形式

$$x^2+y^2+z^2=(a^{\frac{1}{n}}z)^{\frac{2n}{n+1}}$$

因为卵球对称于 z 轴，显然重心在 z 轴上，从而只须求出 $\bar{z}$。卵球对xy面的体积矩是

$$M=\iiint_V z\,dV=\int_0^a \pi(x^2+y^2)z\,dz$$

$$=\pi\int_0^a\left[(a^{\frac{1}{n}}z)^{\frac{2n}{n+1}}-z^2\right]z\,dz$$

$$=\frac{\pi a^4}{4(2n+1)} \tag{84}$$

又卵球的体积

$$V=\frac{2}{3(3n+1)}\pi a^3$$

所以

$$\bar{z}=\frac{M}{V}=\frac{3(3n+1)}{8(2n+1)}a \tag{85}$$

当 n 变为无穷大时，

$$\bar{z}=\lim_{n\to\infty}\frac{3(3n+1)}{8(2n+1)}a=\frac{9}{16}a \tag{86}$$

这就是说，当卵球蜕化为轴线段时，卵球（密度＝1）的质量中心无限地趋近于极限位置 $\bar{z}=\frac{9}{16}a$。

我们现在来考察卵球的转动惯量．设卵球的密度为 μ。于是 $dm=\mu dV$，因此质量为M的卵球对于它的纵轴的转动惯量为

$$I_z=\iiint(x^2+y^2)dm=\iiint\limits_V(x^2+y^2)\mu dV$$

计算这里的三重积分，采用极坐标，即球面坐标（r、θ、φ）较为方便．于是（图16）

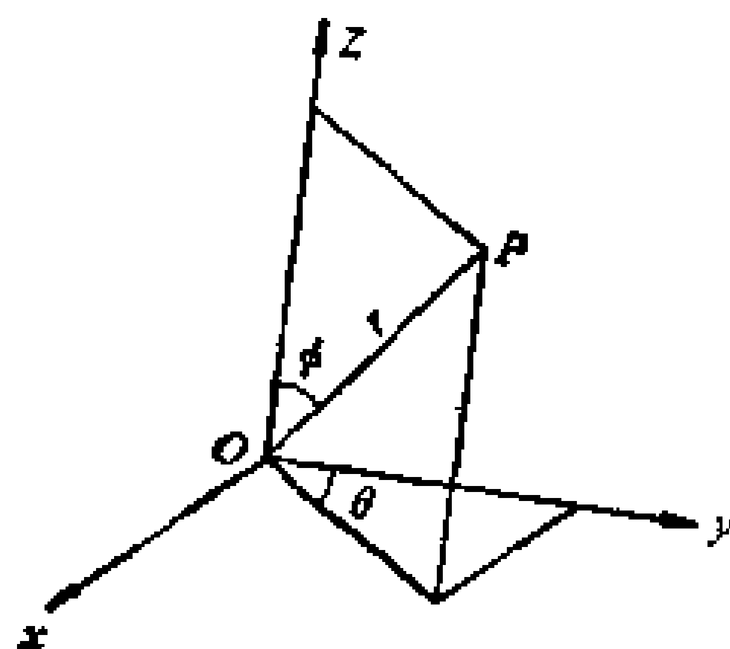


图 16

$$x=r\sin\varphi\sin\theta$$

$$y=r\sin\varphi\cos\theta$$

$$z=r\cos\varphi$$

在极坐标下，我们有

$$dV=r^2\sin\varphi drd\theta d\varphi$$

于是

$$I_z=\iiint\limits_V r^2\sin^2\varphi\cdot\mu dV$$

进行积分时，可设 r 从 0 变到 $a\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=a\cos^n\varphi$，$\varphi$ 从 0 变到$\frac{\pi}{2}$，和θ从 0 变到2π．因此

$$\begin{aligned}I_z&=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\cos^n\varphi}\mu r^4\sin^3\varphi drd\varphi d\theta\\&=\frac{2\mu\pi a^5}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{5n}\varphi\sin^3\varphi d\varphi\\&=\frac{4\mu\pi a^5}{5(5n+1)(5n+3)}\\&=\frac{6(3n+1)}{5(5n+1)(5n+3)}Ma^2\end{aligned}\qquad(87)$$

其中$M=\frac{2}{3(3n+1)}\mu\pi a^3$是卵球的质量．

卵球对于它的纵轴的回转半径显然是

$$k=\sqrt{\frac{I_z}{M}}=\sqrt{\frac{6(3n+1)}{5(5n+1)(5n+3)}}a\qquad(88)$$

卵球对于它的母卵圆准线的转动惯量是

$$I_z = \iiint_V (z^2 + x^2)\mu dV$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\cos^n\varphi} \mu r^4 \cos^2\varphi \sin\varphi \, dr d\varphi d\theta$$

$$+ \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\cos^n\varphi} \mu r^4 \sin^3\varphi \sin^2\theta \, dr d\varphi d\theta$$

$$= \frac{2\mu\pi a^5}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{5n+2}\varphi \sin\varphi \, d\varphi$$

$$+ \frac{\mu\pi a^5}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{5n}\varphi \sin^3\varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{2(5n+2)\mu\pi a^5}{5(5n+1)(5n+3)}$$

$$= \frac{3(3n+1)(5n+2)}{5(5n+1)(5n+3)} M a^2 \qquad (89)$$

十八、可能的应用

卵圆和卵球在导弹、飞机和其他航天航空的研究装置的设虽然计中可以希望找到用途.纵卵圆的形状,可以用来确定机翼前缘（*the leading edge or trailing edge of an airfoil*）．在数学理论中，前缘推力（*the leading edge thrust*）有着确定的数值，但这种推力实质上依存于前缘的形状．在实际应用的马赫数范围内和给定的迎角下，可能期望给前缘找到一个最佳的卵圆形状.纵卵球可作为细长旋转体应用于各种类型的空气动力结构上，这时可应用二维流动或轴对称流动的理论来进行研究．磁悬浮式高速车辆（*magnetically levitated vehicles*）的车头，采用适当的卵头形状，可大大降低空气的阻力．

此外，在空间飞行器工艺中，比较紧凑的纵卵球比起圆球形状，在作为卫星的有效负载方面，可安装较多的自动仪表装置．大型的扩张式圆球，从力学上说是更较复杂些，因为它必须采用伞形的比较容易折叠的肋结构，选用适当的卵指数n，人造卫星的卵球形，可望给出比较良好的光学能见度．

在军用固体燃料火箭弹方向，卵尾和卵头轮廓可能有效地用到空锥装药（*hollow charge*）设计上，以便进一步增大弹头的穿甲能力．

鸟卵壳显示的刚性、扁卵圆显示的稳定性，以及具有不同卵指数的各种卵圆形状，在建筑工艺上，有着适当的应用．例如桥墩，对此可用实验方法确定一种良好流线型的双卵头形状，减小水流对桥墩的冲击力，在桥拱、涵洞和屋拱、屋顶结构和其他薄壳结构等设计方面也可能有所应用．根据日本最新的经验，地下

核电站采用卵圆形的地下防护空间，可以获得最良好的抗震能力和稳定性，这对于多震地区的地下建筑，使卵圆较之其他形状具有独特的应用价值。运输装置的容器如油罐的截面，如采用扁卵圆，可较椭圆具有更大的结构刚性和稳定性，而且外形更为优美。

在工业生产的实际应用中，如齿轮流量计，当采用卵形齿轮时，较之采用椭圆齿轮而后修正为类似卵形者，具有更高的效率。

当前来表定卵圆在应用上的专业范围，或许是过早些，因为它们的一些特征性能还没有充分揭示出来。回想到椭圆理论和椭圆积分在今日科学技术方面的广泛应用，便不能不指出，如果不是事先由古典的数学工作者从椭圆轨迹定义的建立透彻研究和了解了椭圆图像的各种几何性质（例如，从对椭圆法线性质的研究，探索到椭圆法线性质的物理意义：从椭圆的一个焦点发出的光线或声音，经反射后都汇集到椭圆的另一个焦点上。），我们很难想象到后来德国天文学家刻卜勒（Kepler 1571～1630）在研究行星绕日的运动时，将采用甚么样的数学语言来描述行星的运行轨道。因此，事先揭示图像的基本性质和对图像的理论进行深入的研究，对以后的实际应用，可能是意义重大的。

十九、附录：平面曲线的幂变换

幂变换曲线　平面上一条曲线的幂变换曲线，是那条曲线按单位参照标尺长度对于平面上一个极点或一条轴线的幂扩张与/或幂收缩。参照标尺长度可以是任意的正实数，包括1在内。

设在极坐标系中，一条给定的曲线的方程是

$$\rho = F(\theta)$$

又设选用的标尺长度为 G，那么幂变换曲线在同一极坐标下的方程可以定义为

$$r = G\left(\frac{\rho}{G}\right)^n$$

式中 n 是任意的正整数，分数或无理数。

对于一个极点的幂变换的基本定理。

定理1　如果一条曲线 $r = f(\theta)$ 是另一条曲线 $\rho = F(\theta)$ 在参照标尺长度为 G 时对一个极点的 n 次幂变换曲线，那么反过来 $\rho = F(\theta)$ 也是 $r = f(\theta)$ 在参照标尺为 G 时对同一个极点的幂变换曲线。

证明：因为曲线 $r = f(\theta)$ 是曲线 $\rho = F(\theta)$ 在参照标尺长度为 G 时对一个极点的 n 次幂变换曲线，那么根据幂变换的定义，有

$$r = G\left(\frac{\rho}{G}\right)^n$$

或

$$\left(\frac{r}{G}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{\rho}{G}$$

就是

$$\rho=G\left(\frac{r}{G}\right)^{\frac{1}{n}}$$

这个式子表明曲线$\rho=F(\theta)$是曲线$r=f(\theta)$在参照标尺为G时对一个极点的$1/n$次幂变换曲线。故定理得证。

定理2 如果曲线$r_p=f_p(\theta)$，$r_q=f_q(\theta)$，…，是曲线$\rho=F(\theta)$在参照标尺为G时对一个极点的p次，q次，…，幂变换曲线（p，q，…是任意正实数），那么$r_p=f_p(\theta)$，$r_q=f_q(\theta)$，…，在参照标尺为G时也互为幂变换曲线。

证明：因为曲线$r_p=f_p(\theta)$，$r_q=f_q(\theta)$，…，是曲线$\rho=F(\theta)$在参照标尺为G时对一个极点的p次，q次，…幂变换曲线，那么根据幂变换的定义，有

$$r_p=G\left(\frac{\rho}{G}\right)^p$$

$$r_q=G\left(\frac{\rho}{G}\right)^q$$

$$\cdots$$

或

$$\left(\frac{r_p}{G}\right)^{\frac{1}{p}}=\frac{\rho}{G}$$

$$\left(\frac{r_q}{G}\right)^{\frac{1}{q}}=\frac{\rho}{G}$$

$$\cdots$$

∴

$$\left(\frac{r_p}{G}\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\frac{r_q}{G}\right)^{\frac{1}{q}}=\cdots$$

从上式可得

$$\frac{r_p}{G}=\left(\frac{r_q}{G}\right)^{\frac{p}{q}}$$

就是

$$r_p=G\left(\frac{r_q}{G}\right)^{\frac{p}{q}}$$

这个式子表明，曲线$r_p=f_p(\theta)$是曲线$r_q=f_q(\theta)$在参照标尺为G时对一个极点的p/q次幂变换曲线。又由定理1，知$r_q=f_q(\theta)$也是$r_p=f_p(\theta)$的q/p次幂变换曲线。故本定理得证。

根据上述两条定理，我们可以对关于一个极点的幂变换曲线等价地定义如下：

如果平面上有两条曲线，P是一条曲线上的任意一点，当在这个平面上存在一点O，使得直线OP同另一条曲线相交于一点P'，对于所有这样的直线，比值OP/OP'^n是一常数时，这两条曲线叫做互为对极点O的幂变换曲线，其中n是任一正实数。

（1）卵化椭圆（*ovalic ellipses*）

定义：卵化椭圆是椭圆周按单位短轴或单位长轴的长度对椭圆的相关顶点所作的幂扩张与/或幂收缩。

用以导出卵化椭圆的原来的椭圆，叫做这些卵化椭圆的参照椭圆。

1）横卵化椭圆

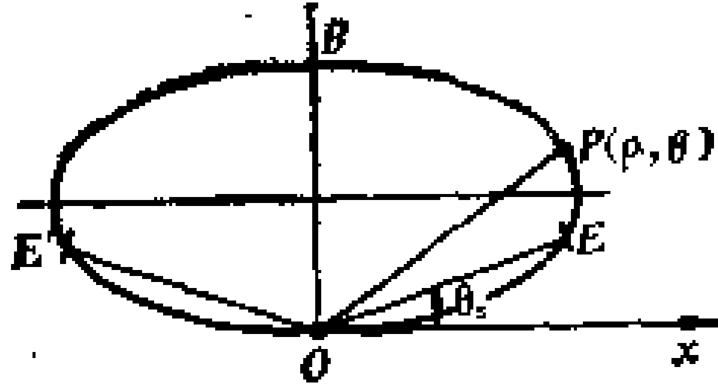
设椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0) \qquad (1)$$

式中a为椭圆的长半轴，b为短半轴。

为了使求出的横卵化椭圆的方程具有较简单的形式，我们将xy-坐标系平移到椭圆的顶点（0，$-b$）作为新原点O，于是椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(y-b)^2}{b^2}=1 \qquad (2)$$



椭圆的离心率$e=\sqrt{3}/2$

图 1

把顶点O作为极点，x轴的正半轴作为极轴，并令

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases} \qquad (3)$$

将直角坐标方程（2）化成极坐标方程

$$\rho=\frac{2a^2b\,\mathrm{tg}\theta\sec\theta}{b^2+a^2\mathrm{tg}^2\theta} \qquad (4)$$

式中ρ是椭圆周上任意一点p的极径OP，θ是OP同极轴所成的极角（图1）．

回顾前述关于向一个极点所作的幂变换的卵化椭圆的定义，并取椭圆的短轴$2b$作为参照标尺，有

$$r=2b\left(\frac{\rho}{2b}\right)^n$$

$$=2b\left(\frac{a^2tg\theta\sec\theta}{b^2+a^2tg^2\theta}\right)^n \quad (n>0) \qquad (5)$$

这就是所求的用极坐标r，θ表达的横卵化椭圆的标准方程，它的参照椭圆的长轴与极轴平行。

用$OB=2b$为半径画弧与参照椭圆相交于两点E与E'．点E与E'称为静力点，因为在进行幂变换的位移过程中，这两个点始终静止不动。同这两点E与E'相应的极角θ_s或$\theta_{s'}$称为静力角．

我们现在转回考虑参照椭圆的一组径向弦，以求这两个静力角θ_s与$\theta_{s'}$($\theta_s+\theta_{s'}=180°$)。

经过原点O，并且斜率是m的直线的方程是

$$y=mx \qquad (6)$$

这条直线与椭圆的交点P的坐标，可以通过联解它们的方程求得．

将式（6）中的y代入式（2）中，并集项，可得

$$(a^2m^2+b^2)x^2-2a^2bmx=0 \qquad (7)$$

这一方程的根，就是交点的x坐标。当$m=0$，即当直线与x轴平行并且重合时，得切点为（0，0）．当$m=0$，从方程（7）与（6）可以求得交点P的坐标是：

$$\begin{cases} x=\dfrac{2a^2bm}{a^2m^2+b^2} \\ y=\dfrac{2a^2bm^2}{a^2m^2+b^2} \end{cases} \qquad (8)$$

经过原点O的径向弦OP的长度的平方为

$$\rho^2=x^2+y^2$$

$$= \frac{4a^4b^2(m^2+m^4)}{(a^2m^2+b^2)^2} \tag{9}$$

或
$$\rho = \frac{2a^2b(m^2+m^4)^{1/2*}}{a^2m^2+b^2} \tag{10}$$

令 $\rho=2b$，即

$$2b = \frac{2a^2b(m^2+m^4)^{1/2}}{a^2m^2+b^2}$$

就 m^2 求解上式，可得

$$m_s^2 = \frac{b^4}{a^2(a^2-2b^2)} \tag{11}$$

或

$$m_s = \pm\frac{b^2}{a(a^2-2b^2)^{1/2}} \tag{12}$$

这就是椭圆的静力弦 OE 或 OE' 的斜率。

从而求得静力角

$$\theta_s = \mathrm{arctg}\frac{b^2}{a(a^2-2b^2)^{1/2}} \tag{13}$$

当参照椭圆的 $a=2b$，或离心率 $e=\sqrt{3}/2$时（图1），于式（13）中代入有关数值，可得

$$\theta_s = \mathrm{arctg}\frac{b^2}{2b(4b^2-2b^2)^{1/2}}$$

$$= \mathrm{arctg}\sqrt{2}/4$$

$$= \mathrm{arctg}0.3535534$$

即　　$\theta_s = 19.471221^\circ$

从而　　$\theta_s' = 180^\circ - 19.471221^\circ = 160.528779^\circ$.

显然，长是 $2b$ 的极径 OE 或 OE' 在幂变换中保持恒定不动，而参照椭圆周上，除 O，B，E 与 E' 外的所有点在幂变换中均会位移到新的位置，极角保持不变。幂变换后所有点的集合，包括

* 当然，此式也可直接从式（4）变化得出.

O，B，E 与 E' 点在内，就构成上述的横卵化椭圆.

此外，我们还可直觉地观察到，在一给定离心率 e 的参照椭圆中，可能存在两个极角 θ_H 和 θ_H'，在这两个极角下，极径 ρ 恒具有最大长度（图1）。这两个极角称为触角角，因为同极轴成角为 θ_H 或 θ_H' 的极径 ρ，对于卵指数 n 的变化具有最大的敏感度，显示了蜗牛的触角的行为.

现在求用参照椭圆的长半轴 a 与短半轴 b 来表达的触角角。因为式（10）只是斜率 m 的函数，问题是找出使极径 ρ 为极大时的斜率.

就式（10）对 m 微分，

$$\frac{d\rho}{dm}=\frac{2a^2b[b^2-(a^2-2b^2)m^2]}{(a^2m^2+b^2)(1+m^2)^{1/2}}$$

令 $d\rho/dm=0$，可得

$$m_H^{\ 2}=\frac{b^2}{a^2-2b^2} \tag{14}$$

或

$$m_H=\frac{b}{(a^2-2b^2)^{1/2}} \tag{15}$$

这就是椭圆的触角弦的斜率.

从而求得触角角

$$\theta_H=\text{arc tg}\frac{b}{(a^2-2b^2)^{1/2}} \tag{16}$$

当参照椭圆的 $a=2b$，或离心率 $e=\sqrt{3}/2$ 时（图2），在式（16）中代入有关数值，可得

$$\begin{aligned}\theta_H&=\text{arc tg}\frac{b}{(4b^2-2b^2)^{1/2}}\\&=\text{arc tg}\sqrt{2}/2\\&=\text{arc tg}0.7071068\end{aligned}$$

即 $$\theta_H=35.26439^\circ$$

从而 $$\theta_H'=180^\circ-35.26439^\circ=144.73561^\circ.$$

从式(11)与(14)，我们发现在静力弦与触角弦的斜率之间存在一重要的关系，即

$$m_s^2 = \frac{b^2}{a^2} m_H^2 \tag{17}$$

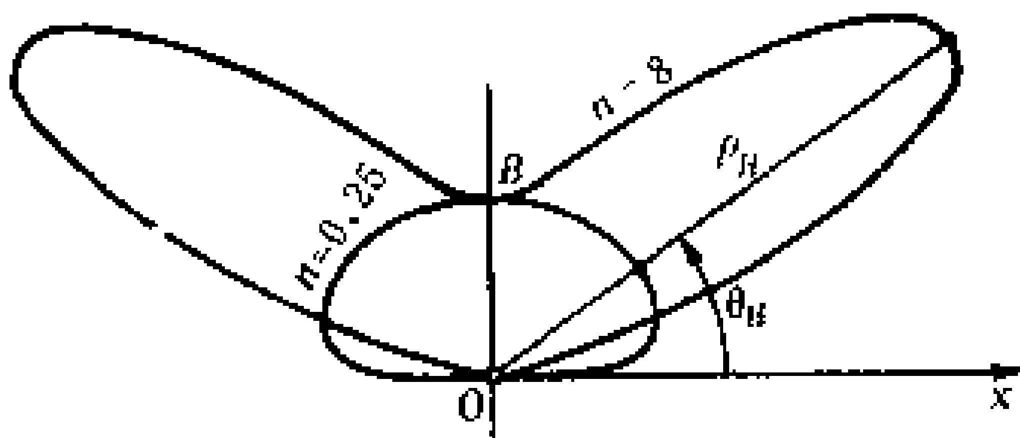
或

$$\frac{m_s^2}{m_H^2} = \frac{b^2}{a^2} \tag{18}$$

因为$a>b$，可得

$$m_s^2 < m_H^2$$

就是说触角弦斜率的平方总是大于静力弦斜率的平方，这也意味着触角弦总是在静力弦的上方，更为靠近参照椭圆的短轴。



参照椭圆的离心率 $e=\sqrt{3}/2$

图 2

从式（11）或（14），还应该注意到，静力弦或触角弦的概念，只有在当椭圆长轴的长度大于短轴长度的$\sqrt{2}$倍的情况下才是可行的。在 $a=\sqrt{2}b$的情况下，式（11）或（14）的右侧分母为零。因此，我们说在这种情况下，静力弦或触角弦没有斜率，这时静力弦与触角弦两者与椭圆的短轴重合。此外，在$b \leq a \leq \sqrt{2}b$ 的情况下，静力弦与触角弦的概念已失去意义，因为以极点 O 为圆心，$OB=2b$ 为半径画弧，已经不再与参照椭圆相交，而总是外切参照椭圆于点 B。

从前面的定义可得出，能够确定并因而影响卵化椭圆的大小和形状的量，有参照椭圆的长轴与短轴（从而离心率）、参照标

尺的长度以及卵指数 $n(n>0)$ 。

在图 2 中，就相同的参照椭圆的离心率 $e=\sqrt{3}/2$ 与不同的卵指数值 $0<n<1$ 与 $n>1$ 的情况下，分别绘有横卵化椭圆的典型图形。从图中，可以清楚地看到，当 $n>1$ 时，总是对应于触角角的两条触角弦，随着 n 值的增大而极为敏感地急据增长。

2）纵卵化椭圆

设椭圆的标准方程为

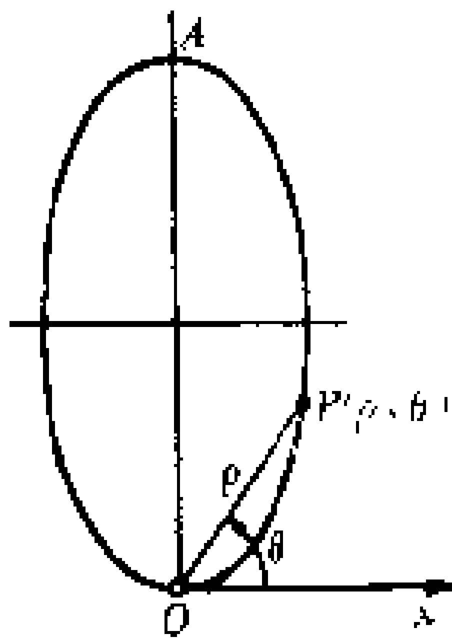
$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \quad (a>b>0) \tag{19}$$

为了推导纵卵化椭圆的方程，将 xy-坐标系平移到椭圆的顶点（0，$-a$）作为新原点 O，于是椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{(y-a)^2}{a^2}=1 \tag{20}$$

在极坐标系中，式（20）化为

$$\rho=\frac{2ab^2\operatorname{tg}\theta\sec\theta}{a^2+b^2\operatorname{tg}^2\theta} \tag{21}$$



椭圆的离心率

$e=\sqrt{3}/2$

图 3

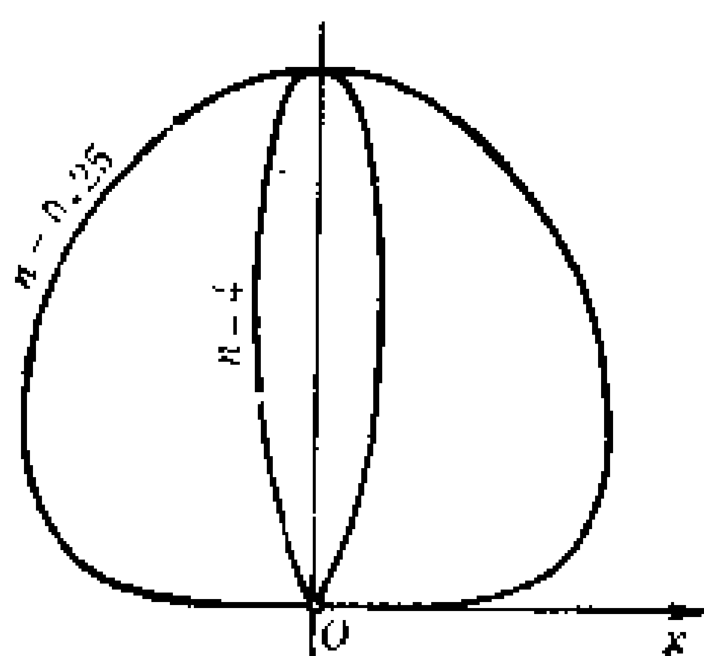
式中 ρ 是椭圆周上任意一点 P 的极径，θ 是 OP 同极轴所成的极角（图 3）。

回顾关于向一个极点所作的幂变换的卵化椭圆的定义，并取椭圆的长轴 $2a$ 作为参照标尺，有

$$r=2a\left(\frac{\rho}{2a}\right)^n$$

$$=2a\left(\frac{b^2\operatorname{tg}\theta\sec\theta}{a^2+b^2\operatorname{tg}^2\theta}\right)^n \quad (n>0) \tag{22}$$

这就是所求的用极坐标 r，θ 表达的纵卵化椭圆的标准方程，它的参照椭圆的长轴与极轴垂直。



参照椭圆的离心率$e=\sqrt{3}/2$

图 4

在图 4 中，就相同的参照椭圆的离心率 $e=\sqrt{3}/2$ 与不同的卵指数值，$0<n<1$ 与 $n>1$ 的情况下，分别绘有纵卵化椭圆的典型图形。容易看到，当 n 变为正无穷小时，长轴为 $2a$ 的参照椭圆的所有纵卵化椭圆均将逼近一半径为 $2a$ 的封闭半圆，而与参照椭圆的离心率无关。

（2）椭圆对于以椭圆中心为极点的幂变换

设椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$$

容易求出这个椭圆的极坐标方程是

$$\rho=\frac{ab}{(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)^{1/2}} \tag{23}$$

现在求这个椭圆以它的中心作为极点的幂变换方程。由于在这种变换中可以最适当地选择的参照标尺有三种，即椭圆的长半轴 a，短半轴 b 及长半轴 a 与短半轴 b 的几何中项 $\sqrt{ab}$。下面我们就来分别求这个椭圆按照上述三种不同的单位参照标尺长度，对于椭圆中心的 n 次幂变换曲线。从这里可以看到参照标尺长度对幂变换曲线形状的影响。

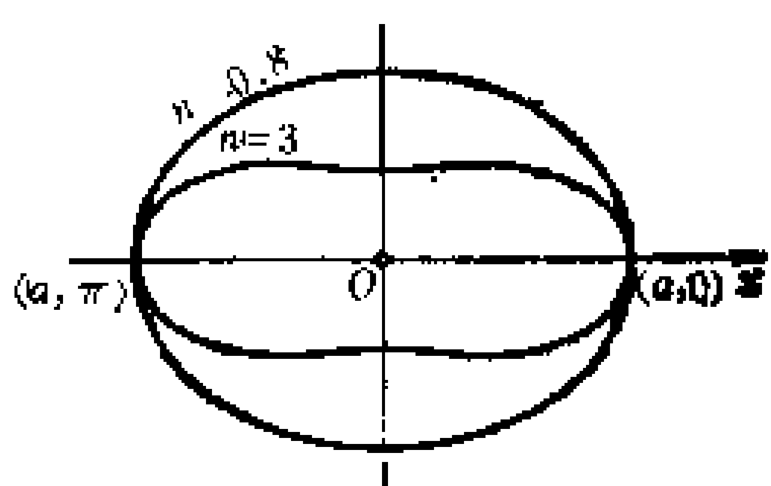
1）取椭圆的长半轴 a 作为参照标尺的长度，根据平面曲线的幂变换定义，有

$$\begin{aligned} r&=a\left(\frac{\rho}{a}\right)^n \\ &=a\left[\frac{1}{\dfrac{a^2}{b^2}\sin^2\theta+\cos^2\theta}\right]^{n/2} \end{aligned} \tag{24}$$

这个方程称为椭圆的第一类中心幂变换曲线方程。在图 5 中分别

绘有离心率$e=\sqrt{2}/2$的椭圆在不同幂指数，$0<n<1$与$n>1$的情况下的第一类中心幂变换曲线。

在图5中，可以看出，椭圆的第一类中心幂变换曲线中的$0<n<1$型曲线，恒外包并且外切于$n>1$型曲线，它们的切点在$(a,0)$与(a,π)处。对于$n>1$型曲线，一般地还存在四个拐点；曲线中腰间的距离，将随着n值的增大而急剧减小，整个曲线也就越来越扁平。



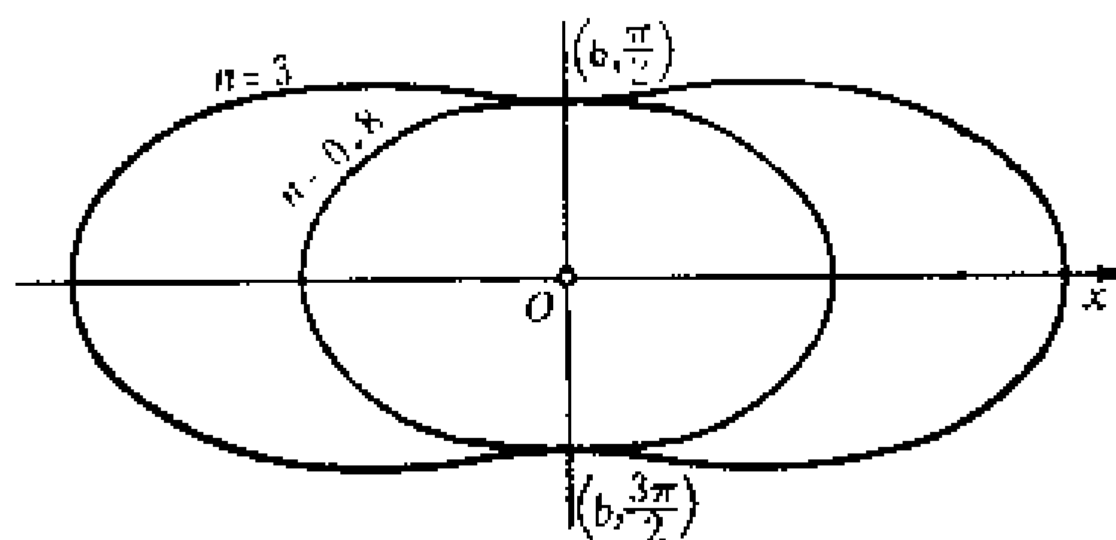
椭圆的离心率 $e=\sqrt{2}/2$

图 5

2）取椭圆的短半轴b作为参照标尺的长度，根据平面曲线的幂变换定义，有

$$
\begin{aligned}
r &= b\left(\frac{\rho}{b}\right)^n \\
&= b\left(\frac{1}{\sin^2\theta+\frac{b^2}{a^2}\cos^2\theta}\right)^{n/2}
\end{aligned}
\qquad (25)
$$

这个方程称为椭圆的第二类中心幂变换曲线方程。在图6中分别绘有离心率$e=\sqrt{2}/2$的椭圆在不同幂指数，$0<n<1$与$n>1$的情况下的第二类中心幂变换曲线。



椭面的离心率 $e=\sqrt{2}/2$

面 6

从图6中可以看出，椭圆的第二类中心幂变换曲线中的$n>$

1型曲线，恒外包并且外切于 $0<n<1$型曲线，它们的切点在$(b,\pi/2)$ 与 $(b,3\pi/2)$ 处。对于 $n>1$ 型曲线，一般地存在四个拐点；曲线在极轴上两端头的膨大部分，将随着 n 值的增大而急剧地延伸与向旁侧相应扩张，形成中央向内凹陷而边缘膨大的扁圆盘的纵截面形状，它的中心厚度恒为 $2b$，如图 7 所示。

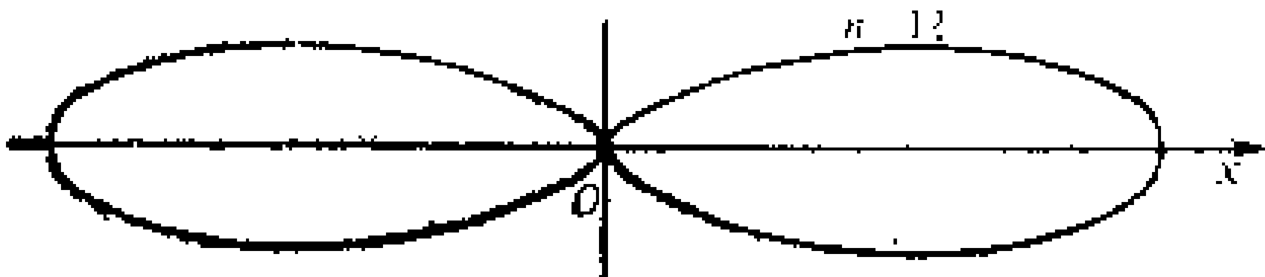
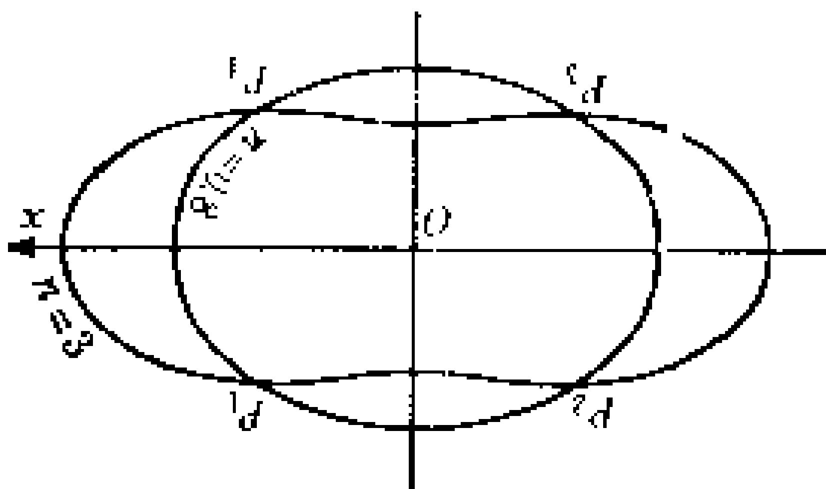


图 7

3）取椭圆的长半轴 a 与短半轴 b 的几何中项$\sqrt{ab}$ 作为参照标尺的长度，根据平面曲线的幂变换定义，有

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{ab}\left(\frac{\rho}{\sqrt{ab}}\right)^{n} \\
&= \sqrt{ab}\left(\frac{1}{\frac{a}{b}\sin^2\theta+\frac{b}{a}\cos^2\theta}\right)^{n/2}
\end{aligned}
\tag{26}
$$



椭圆的离心率 $e=\sqrt{2}/2$

图 8

这个方程称为椭圆的第三类中心幂变换曲线方程。在图 8 中分别绘有离心率 $e=\sqrt{2}/2$的椭圆在不同幂指数，$0<n<1$与$n>1$的情况下的第三类中心幂变换曲线。

从图8中可以看出，椭圆的第三类中心幂变换曲线中的 $n>1$ 型曲线，一般地也存在四个拐点，它并且与 $0<n<1$ 型曲线恒相交于四个对称点。在这四个对称交点处，$n>1$ 型曲线与 $0<n<1$ 型具有相同的极径，它的充要条件是方程（26）中方括号内的数值为 1，即

$$\frac{a}{b}\sin^2\theta+\frac{b}{a}\cos^2\theta=1 \tag{27}$$

这时极径 $r=\sqrt{ab}$。

将 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ 代入上式，求解得

$$\sin^2\theta=\frac{b}{a+b} \tag{28}$$

或

$$\sin\theta=\pm\sqrt{\frac{b}{a+b}}$$

$$\therefore \qquad \theta=\arcsin\pm\sqrt{\frac{b}{a+b}} \tag{29}$$

当椭圆的$a=\sqrt{2}b$，或离心率$e=\sqrt{2}/2$时（图 8），在式(29)中代入有关数值，可得第三类中心幂变换曲线中，$n>1$型曲线与$0<n<1$型曲线交点处的极角

$$\theta=\arcsin\pm\sqrt{\frac{b}{\sqrt{2}b+b}}$$

$$=\arcsin\pm\sqrt{\sqrt{2}-1}$$

$$=\arcsin\pm0.6435943$$

或

$$\theta_1=40.060359^\circ$$

$$\theta_2=139.939641^\circ$$

$$\theta_3=220.060359^\circ$$

$$\theta_4=319.939641^\circ$$

（3）椭圆对于平面上一条轴线的幂变换曲线

设椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0) \tag{1}$$

现在求这个椭圆对于 x 轴的幂变换曲线的方程。就上式求解 y，得

虑把这种幂收缩或幂扩张的概念应用到椭圆上时，由于椭圆有长轴与短轴之分，这就有按单位长轴长度或单位短轴长度来对椭圆周上一个相关极点进行幂收缩与/或幂扩张的区别，从而抽象出了"参照标尺"的新概念．这种参照标尺(*reference gauge*)并不限于是图形上某特定线段的长度，而可以是任意选定的适宜的长度，包括1在内这样我们就在更广泛的思维中建立起平面曲线的幂变换这一观念，而反过来，则卵圆与卵化椭圆等仅仅是平面曲线的幂变换的一些个别应用而已．当然，卵圆在这些应用中是最具有独特性的一类曲线，实用价值也较大．

在这本书中，引用来进行幂变换的曲线，如圆与椭圆等，都是对称性封闭图形．实际上，平面曲线按某单位标尺长度对平面上一个极点或一条轴线的幂变换的观念可应用于任何平面曲线，包括各种超越曲线在内　这种幂变换的观念，不仅适用于显函数曲线，对于隐函数曲线也同样适用，只是论证要复杂一些．由于篇幅的限制，故在本书的例证中均选用了显函数曲线，直观性与接受性较强．

实际上，有关平面曲线按某单位标尺长度对平面上一个极点或一条轴线的幂变换的概念，可以很自然地推广到三维空间中的挠曲线或曲面按某单位标尺长度对空间的一个极点，一条轴线或一个平面的幂变换

二十、全卵圆积分数值表说明

说明：表1给出准确到六位有效数字的第一类与第二类全卵圆积分V与I的数值，其卵指数n的等间隔值范围为从1.000到1.200，从1.200到1.800，从1.80到2.80，从2.80到4.00，从4.0到8.0，从8.0到10.0，从10到30，从30到100，从100到200，从200到500，从500到1000，以及从1000到∞的某些n值。

表2给出准确到六位有效数字的第三类与第四类全卵圆积分J与L的数值，其卵指数n的等间隔值范围从0.0000到0.0080，从0.0080到0.0400，从0.040到0.120，从0.120到0.300，以及从0.300到1.000。

表 1. 不同卵指数n值下的全卵圆积分V与I

$$V=\int_0^{\pi/2}\sin^{n-1}\theta\sqrt{1-\kappa\sin^2\theta}\,d\theta;$$

$$I=\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-1}\theta\ \cos\theta\sqrt{1-\kappa\sin^2\theta}\,d\theta,$$

这里 $\kappa=(n^2-1)/n^2$.

n	κ	V	2nV	I	2nπI
1.000	0.0000000	1.57080	3.14159	0.500000	3.14159
1.002	0.0039830	1.56706	3.14038	0.498504	3.13846
1.004	0.0079523	1.56333	3.13917	0.497015	3.13533
1.006	0.0118929	1.55962	3.13796	0.495533	3.13220
1.008	0.0158100	1.55593	3.13676	0.494058	3.12909
1.010	0.0197040	1.55226	3.13556	0.492591	3.12599
1.012	0.0235748	1.54860	3.13436	0.491130	3.12289
1.014	0.0274228	1.54496	3.13317	0.489677	3.11980
1.016	0.0312481	1.54133	3.13198	0.488230	3.11672
1.018	0.0350508	1.53772	3.13079	0.486791	3.11365

续表 1

n	κ	V	2nV	I	2nπI
1.020	0.0388312	1.53412	3.12960	0.485359	3.11059
1.022	0.0425895	1.53054	3.12842	0.483933	3.10753
1.024	0.0463257	1.52697	3.12724	0.482514	3.10449
1.026	0.0500401	1.52342	3.12606	0.481102	3.10145
1.028	0.0537328	1.51989	3.12489	0.479697	3.09842
1.030	0.0574041	1.51637	3.12371	0.478298	3.09539
1.032	0.0610540	1.51286	3.12254	0.476906	3.09238
1.034	0.0646828	1.50937	3.12138	0.475520	3.08937
1.036	0.0682906	1.50590	3.12022	0.474142	3.08637
1.038	0.0718775	1.50243	3.11905	0.472769	3.08338
1.040	0.0754438	1.49899	3.11790	0.471403	3.08039
1.042	0.0789895	1.49556	3.11674	0.470044	3.07741
1.044	0.0825149	1.49214	3.11559	0.468690	3.07444
1.046	0.0860201	1.48874	3.11444	0.467344	3.07148
1.048	0.0895053	1.48535	3.11329	0.466003	3.06853
1.050	0.0929705	1.48197	3.11215	0.464669	3.06558
1.052	0.0964160	1.47861	3.11100	0.463341	3.06264
1.054	0.0998419	1.47527	3.10986	0.462019	3.05971
1.056	0.1032484	1.47194	3.10873	0.460703	3.05679
1.058	0.1066356	1.46862	3.10759	0.459394	3.05387
1.060	0.1100036	1.46531	3.10646	0.458090	3.05096
1.062	0.1133526	1.46202	3.10534	0.456793	3.04806
1.064	0.1166827	1.45874	3.10421	0.455501	3.04516
1.066	0.1199941	1.45548	3.10308	0.454215	3.04228
1.068	0.1232869	1.45223	3.10196	0.452936	3.03940
1.070	0.1265613	1.44899	3.10085	0.451662	3.03653
1.072	0.1298173	1.44577	3.09973	0.450394	3.03366
1.074	0.1330552	1.44256	3.09862	0.449132	3.03080
1.076	0.1362751	1.43936	3.09751	0.447875	3.02795
1.078	0.1394770	1.43618	3.09640	0.446624	3.02511
1.080	0.1426612	1.43301	3.09529	0.445379	3.02227
1.082	0.1458277	1.42985	3.09419	0.444140	3.01944
1.084	0.1489767	1.42670	3.09309	0.442906	3.01662
1.086	0.1521084	1.42357	3.09199	0.441678	3.01380
1.088	0.1552228	1.42045	3.09090	0.440455	3.01100

续表 1

n	κ	V	2nV	I	2nπI
1.090	0.1583200	1.41734	3.08980	0.439238	3.00820
1.092	0.1614003	1.41425	3.08872	0.438026	3.00540
1.094	0.1644636	1.41116	3.08763	0.436820	3.00261
1.096	0.1675103	1.40809	3.08654	0.435619	2.99983
1.098	0.1705402	1.40504	3.08546	0.434424	2.99706
1.100	0.1735537	1.40199	3.08438	0.433233	2.99429
1.102	0.1765508	1.39896	3.08330	0.432048	2.99153
1.104	0.1795316	1.39594	3.08222	0.430869	2.98878
1.106	0.1824963	1.39293	3.08115	0.429694	2.98603
1.108	0.1854449	1.38993	3.08008	0.428525	2.98330
1.110	0.1883776	1.38694	3.07901	0.427361	2.98056
1.112	0.1912944	1.38397	3.07795	0.426203	2.97784
1.114	0.1941956	1.38101	3.07688	0.425049	2.97512
1.116	0.1970812	1.37806	3.07582	0.423900	2.97240
1.118	0.1999514	1.37512	3.07476	0.422757	2.96970
1.120	0.2028061	1.37219	3.07371	0.421618	2.96700
1.122	0.2056456	1.36928	3.07265	0.420485	2.96430
1.124	0.2084700	1.36637	3.07160	0.419356	2.96162
1.126	0.2112793	1.36348	3.07055	0.418232	2.95894
1.128	0.2140737	1.36060	3.06951	0.417114	2.95626
1.130	0.2168533	1.35773	3.06846	0.416000	2.95360
1.132	0.2196182	1.35487	3.06742	0.414891	2.95094
1.134	0.2223684	1.35202	3.06638	0.413786	2.94828
1.136	0.2251041	1.34918	3.06534	0.412687	2.94564
1.138	0.2278225	1.34636	3.06431	0.411592	2.94299
1.140	0.2305325	1.34354	3.06327	0.410502	2.94036
1.142	0.2332253	1.34074	3.06224	0.409417	2.93773
1.144	0.2359040	1.33794	3.06121	0.408336	2.93511
1.146	0.2385686	1.33516	3.06019	0.407261	2.93249
1.148	0.2412194	1.33239	3.05916	0.406189	2.92988
1.150	0.2438563	1.32963	3.05814	0.405122	2.92728
1.152	0.2464796	1.32688	3.05712	0.404060	2.92468
1.154	0.2490891	1.32410	3.05610	0.403003	2.92209
1.156	0.2516852	1.32141	3.05509	0.401949	2.91950
1.158	0.2542678	1.31869	3.05408	0.400901	2.91692

续表 1

n	κ	V	2nV	I	2nπI
1.160	0.2568371	1.31598	3.05307	0.399857	2.91435
1.162	0.2593931	1.31328	3.05206	0.398817	2.91179
1.164	0.2619360	1.31059	3.05105	0.397781	2.90922
1.166	0.2644658	1.30791	3.05005	0.396750	2.90667
1.168	0.2669825	1.30524	3.04904	0.395724	2.90412
1.170	0.2694864	1.30258	3.04804	0.394701	2.90158
1.172	0.2719775	1.29994	3.04705	0.393683	2.89904
1.174	0.2744559	1.29730	3.04605	0.392670	2.89651
1.176	0.2769217	1.29467	3.04506	0.391660	2.89399
1.178	0.2793748	1.29205	3.04407	0.390655	2.89147
1.180	0.2818156	1.28944	3.04308	0.389654	2.88895
1.182	0.2842439	1.28684	3.04209	0.388657	2.88645
1.184	0.2866600	1.28425	3.04111	0.387664	2.88394
1.186	0.2890638	1.28167	3.04012	0.386675	2.88145
1.188	0.2914555	1.27910	3.03914	0.385691	2.87896
1.190	0.2938352	1.27654	3.03817	0.384710	2.87648
1.192	0.2962029	1.27399	3.03719	0.383734	2.87400
1.194	0.2985587	1.27145	3.03622	0.382762	2.87152
1.196	0.3009027	1.26891	3.03524	0.381793	2.86906
1.198	0.3032349	1.26639	3.03427	0.380829	2.86660
1.200	0.3055556	1.26388	3.03330	0.379869	2.86414
1.205	0.3113066	1.25763	3.03089	0.377485	2.85803
1.210	0.3169865	1.25144	3.02849	0.375125	2.85195
1.215	0.3225965	1.24531	3.02611	0.372790	2.84590
1.220	0.3281376	1.23924	3.02374	0.370478	2.83989
1.225	0.3336110	1.23321	3.02137	0.368189	2.83392
1.230	0.3390178	1.22725	3.01902	0.365924	2.82798
1.235	0.3443590	1.22133	3.01669	0.363681	2.82207
1.240	0.3496358	1.21547	3.01437	0.361460	2.81619
1.245	0.3548491	1.20966	3.01205	0.359262	2.81035
1.250	0.3600000	1.20390	3.00975	0.357085	2.80454
1.255	0.3650894	1.19819	3.00746	0.354929	2.79876
1.260	0.3701184	1.19254	3.00519	0.352795	2.79301
1.265	0.3750879	1.18693	3.00292	0.350682	2.78730
1.270	0.3799988	1.18136	3.00067	0.348589	2.78162

续表 1

n	κ	V	2nV	I	2nπI
1.275	0.3848520	1.17585	2.99843	0.346516	2.77596
1.280	0.3896484	1.17039	2.99620	0.344464	2.77034
1.285	0.3943890	1.16497	2.99398	0.342431	2.76475
1.290	0.3990746	1.15960	2.99177	0.340418	2.75919
1.295	0.4037060	1.15427	2.98957	0.338424	2.75366
1.300	0.4082840	1.14899	2.98738	0.336449	2.74816
1.305	0.4128096	1.14376	2.98521	0.334492	2.74269
1.310	0.4172834	1.13857	2.98304	0.332555	2.73725
1.315	0.4217063	1.13342	2.98089	0.330635	2.73184
1.320	0.4260790	1.12831	2.97875	0.328734	2.72645
1.325	0.4304023	1.12325	2.97661	0.326850	2.72110
1.330	0.4346769	1.11823	2.97449	0.324984	2.71577
1.335	0.4389036	1.11325	2.97238	0.323135	2.71047
1.340	0.4430831	1.10831	2.97028	0.321303	2.70520
1.345	0.4472160	1.10342	2.96819	0.319488	2.69996
1.350	0.4513032	1.09856	2.96611	0.317690	2.69474
1.355	0.4553451	1.09374	2.96404	0.315908	2.68955
1.360	0.4593426	1.08896	2.96197	0.314143	2.68439
1.365	0.4632962	1.08422	2.95992	0.312394	2.67926
1.370	0.4672066	1.07952	2.95788	0.310660	2.67415
1.375	0.4710744	1.07486	2.95585	0.308942	2.66907
1.380	0.4749002	1.07023	2.95383	0.307240	2.66401
1.385	0.4786847	1.06564	2.95182	0.305552	2.65898
1.390	0.4824284	1.06108	2.94981	0.303880	2.65398
1.395	0.4861320	1.05657	2.94782	0.302223	2.64500
1.400	0.4897959	1.05208	2.94584	0.300580	2.64404
1.405	0.4934208	1.04764	2.94386	0.298952	2.63911
1.410	0.4970072	1.04323	2.94190	0.297339	2.63421
1.415	0.5005556	1.03885	2.93994	0.295739	2.62933
1.420	0.5040667	1.03451	2.93800	0.294154	2.62448
1.425	0.5075408	1.03020	2.93606	0.292582	2.61964
1.430	0.5109785	1.02592	2.93413	0.291024	2.61484
1.435	0.5143804	1.02168	2.93221	0.289479	2.61005
1.440	0.5177469	1.01747	2.93030	0.287948	2.06529
1.445	0.5210785	1.01329	2.92840	0.286430	2.60056

续表 1

n	κ	V	2nV	I	2nπI
1.450	0.5243757	1.00914	2.92651	0.284925	2.59585
1.455	0.5276390	1.00502	2.92462	0.283433	2.59116
1.460	0.5308688	1.00094	2.92275	0.281954	2.58649
1.465	0.5340656	0.996887	2.92088	0.280487	2.58185
1.470	0.5372299	0.992864	2.91902	0.279033	2.57722
1.475	0.5403620	0.988872	2.91717	0.277591	2.97263
1.480	0.5434624	0.984908	2.91533	0.276161	2.56805
1.485	0.5465315	0.980975	2.91350	0.274743	2.56350
1.490	0.5495698	0.977071	2.91167	0.273337	2.55896
1.495	0.5525777	0.973195	2.90985	0.271942	2.55445
1.500	0.5555556	0.969348	2.90804	0.270559	2.54996
1.505	0.5585038	0.965530	2.90624	0.269188	2.54549
1.510	0.5614227	0.961739	2.90445	0.267828	2.54105
1.515	0.5643129	0.957976	2.90267	0.266479	2.53662
1.520	0.5671745	0.954240	2.90089	0.265141	2.53222
1.525	0.5700081	0.950532	2.89912	0.263814	2.52783
1.530	0.5728139	0.946850	2.89736	0.262498	2.52347
1.535	0.5755923	0.943194	2.89561	0.261193	2.51913
1.540	0.5788437	0.939565	2.89386	0.259898	2.51480
1.545	0.5810685	0.935962	2.89212	0.258614	2.51050
1.550	0.5837669	0.932385	2.89039	0.257340	2.50622
1.555	0.5864393	0.928833	2.88867	0.256076	2.50196
1.560	0.5890861	0.925306	2.88696	0.254823	2.49771
1.565	0.5917076	0.921804	2.88525	0.253579	2.49349
1.570	0.5943040	0.918327	2.88355	0.252345	2.48928
1.575	0.5968758	0.914874	2.88185	0.251121	2.48510
1.580	0.5994232	0.911445	2.88017	0.249907	2.48093
1.585	0.6019465	0.908041	2.87849	0.248702	2.47679
1.590	0.6044460	0.904660	2.87682	0.247507	2.47266
1.595	0.6069221	0.901302	2.87515	0.246321	2.46855
1.600	0.6093750	0.897968	2.87350	0.245144	2.46446
1.605	0.6118050	0.894656	2.87185	0.243977	2.46039
1.610	0.6142124	0.891367	2.87020	0.242818	2.45633
1.615	0.6165975	0.888101	2.86857	0.241669	2.45230
1.620	0.6189605	0.884857	2.86694	0.240528	2.44828

续表 1

n	κ	V	2nV	I	2nπI
1.625	0.6213018	0.881636	2.86532	0.239396	2.44428
1.630	0.6236215	0.878436	2.86370	0.238273	2.44030
1.635	0.6259200	0.875257	2.86209	0.237159	2.43634
1.640	0.6281975	0.872100	2.86049	0.236053	2.43239
1.645	0.6304543	0.868965	2.85889	0.234955	2.42846
1.650	0.6326905	0.865850	2.85730	0.233866	2.42455
1.655	0.6349066	0.862756	2.85572	0.232785	2.42065
1.660	0.6371026	0.859683	2.85415	0.231712	2.41677
1.665	0.6392789	0.856630	2.85258	0.230647	2.41291
1.670	0.6414357	0.853597	2.85102	0.229590	2.40907
1.675	0.6435732	0.850585	2.84946	0.228541	2.40524
1.680	0.6456916	0.847592	2.84791	0.227500	2.40143
1.685	0.6477912	0.844619	2.84637	0.226467	2.39764
1.690	0.6498722	0.841665	2.84483	0.225440	2.39386
1.695	0.6519348	0.838731	2.84330	0.224422	2.39010
1.700	0.6539792	0.835816	2.84177	0.223412	2.38635
1.705	0.6560057	0.832919	2.84025	0.222408	2.38262
1.710	0.6580144	0.830041	2.83874	0.221412	2.37891
1.715	0.6600056	0.827182	2.83724	0.220424	2.37521
1.720	0.6619794	0.824342	2.83574	0.219442	2.37153
1.725	0.6639361	0.821519	2.83424	0.218468	2.36786
1.730	0.6658759	0.818715	2.83275	0.217500	2.36421
1.735	0.6677989	0.815928	2.83127	0.216540	2.36058
1.740	0.6697054	0.813159	2.82979	0.215587	2.35696
1.745	0.6715955	0.810408	2.82832	0.214640	2.35335
1.750	0.6734694	0.807674	2.82686	0.213700	2.34976
1.755	0.6753273	0.804958	2.82540	0.212768	2.34618
1.760	0.6771694	0.802258	2.82395	0.211841	2.34262
1.765	0.6789959	0.799575	2.82250	0.210921	2.33908
1.770	0.6808069	0.796909	2.82106	0.210008	2.33555
1.775	0.6826027	0.794260	2.81962	0.209101	2.33203
1.780	0.6843833	0.791627	2.81819	0.208201	2.32853
1.785	0.6861490	0.789011	2.81677	0.207306	2.32504
1.790	0.6878999	0.786410	2.81535	0.206419	2.32157
1.795	0.6896362	0.783826	2.81394	0.205537	2.31811

续表1

n	κ	V	2nV	I	2nπI
1.80	0.6913580	0.781257	2.81253	0.204662	2.31467
1.81	0.6947590	0.776168	2.80973	0.202929	2.30782
1.82	0.6981041	0.771140	2.80695	0.201220	2.30103
1.83	0.7013945	0.766172	2.80419	0.199534	2.29429
1.84	0.7046314	0.761265	2.80145	0.197872	2.28761
1.85	0.7078159	0.756416	2.79874	0.196232	2.28098
1.86	0.7109492	0.751625	2.79604	0.194614	2.27440
1.87	0.7140324	0.746890	2.79337	0.193018	2.26787
1.88	0.7170665	0.742212	2.79072	0.191443	2.26140
1.89	0.7200526	0.737588	2.78808	0.189889	2.25497
1.90	0.7229917	0.733017	2.78547	0.188356	2.24860
1.91	0.7258847	0.728500	2.78287	0.186842	2.24228
1.92	0.7287326	0.724035	2.78029	0.185349	2.23600
1.93	0.7315364	0.719621	2.77774	0.183875	2.22977
1.94	0.7342969	0.715257	2.77520	0.182420	2.22359
1.95	0.7370151	0.710943	2.77268	0.180984	2.21746
1.96	0.7396918	0.706677	2.77018	0.179567	2.21137
1.97	0.7423278	0.702460	2.76769	0.178167	2.20533
1.98	0.7449240	0.698289	2.76522	0.176786	2.19934
1.99	0.7474811	0.694165	2.76278	0.175421	2.19339
2.00	0.7500000	0.690086	2.76035	0.174074	2.18748
2.01	0.7524814	0.686053	2.75793	0.172744	2.18162
2.02	0.7549260	0.682063	2.75554	0.171430	2.17580
2.03	0.7573346	0.678117	2.75316	0.170133	2.17002
2.04	0.7597078	0.674214	2.75079	0.168851	2.16429
2.05	0.7620464	0.670353	2.74845	0.167586	2.15859
2.06	0.7643510	0.666533	2.74612	0.166336	2.15294
2.07	0.7666223	0.662754	2.74380	0.165101	2.14733
2.08	0.7688609	0.659016	2.74150	0.163881	2.14176
2.09	0.7710675	0.655317	2.73922	0.162675	2.13623
2.10	0.7732426	0.651656	2.73696	0.161484	2.13074
2.11	0.7753869	0.648035	2.73471	0.160308	2.12528
2.12	0.7775009	0.644450	2.73247	0.159145	2.11987
2.13	0.7795852	0.640904	2.73025	0.157996	2.11449
2.14	0.7816403	0.637394	2.72804	0.156861	2.10916

n	κ	V	2nV	I	2nπI
2.15	0.7836663	0.633920	2.72586	0.155739	2.10385
2.16	0.7856653	0.630481	2.72368	0.154630	2.09859
2.17	0.7876362	0.627078	2.72152	0.153534	2.09336
2.18	0.7895800	0.623709	2.71937	0.152451	2.08817
2.19	0.7914973	0.620374	2.71724	0.151380	2.08301
2.20	0.7933884	0.617072	2.71512	0.150321	2.07789
2.21	0.7952540	0.613804	2.71301	0.149275	2.07281
2.22	0.7970944	0.610568	2.71092	0.148240	2.06775
2.23	0.7989101	0.607366	2.70885	0.147217	2.06273
2.24	0.8007015	0.604192	2.70678	0.146206	2.05775
2.25	0.8024691	0.601052	2.70473	0.145206	2.05280
2.26	0.8042133	0.597941	2.70270	0.144217	2.04788
2.27	0.8059345	0.594862	2.70067	0.143239	2.04300
2.28	0.8076331	0.591812	2.69866	0.142272	2.03814
2.29	0.8093095	0.588791	2.69666	0.141316	2.03332
2.30	0.8109641	0.585799	2.69468	0.140370	2.02853
2.31	0.8125972	0.582836	2.69270	0.139434	2.02377
2.32	0.8142093	0.579902	2.69074	0.138509	2.01904
2.33	0.8158006	0.576995	2.68880	0.137594	2.01435
2.34	0.8173716	0.574116	2.68686	0.136688	2.00968
2.35	0.8189226	0.571263	2.68494	0.135793	2.00504
2.36	0.8204539	0.568438	2.68303	0.134907	2.00044
2.37	0.8219659	0.565638	2.68113	0.134030	1.99586
2.38	0.8234588	0.562865	2.67924	0.133163	1.99131
2.39	0.8249330	0.560118	2.67736	0.132304	1.98679
2.40	0.8263889	0.557395	2.67550	0.128147	1.96461
2.41	0.8278267	0.554698	2.67364	0.128961	1.96899
2.42	0.8292466	0.552025	2.67180	0.129784	1.97340
2.43	0.8306491	0.549377	2.66997	0.130615	1.97784
2.44	0.8320344	0.546752	2.66815	0.131455	1.98230
2.45	0.8334027	0.544152	2.66634	0.127341	1.96026
2.46	0.8347544	0.541574	2.66454	0.126543	1.95594
2.47	0.8360898	0.539020	2.66276	0.125754	1.95164
2.48	0.8374089	0.536488	2.66098	0.124973	1.94736
2.49	0.8387123	0.533979	2.65922	0.124199	1.94311

续表 1

n	κ	V	2nV	I	2nπI
2.50	0.8400000	0.531492	2.65746	0.123434	1.93889
2.51	0.8412724	0.529027	2.65571	0.122676	1.93470
2.52	0.8425296	0.526583	2.65398	0.121926	1.93053
2.53	0.8437720	0.524161	2.65226	0.121183	1.92638
2.54	0.8449997	0.521760	2.65054	0.120448	1.92226
2.55	0.8462130	0.519380	2.64884	0.119720	1.91816
2.56	0.8474121	0.517020	2.64714	0.118999	1.91409
2.57	0.8485973	0.514680	2.64546	0.118285	1.91004
2.58	0.8497686	0.512361	2.64378	0.117578	1.90602
2.59	0.8509265	0.510061	2.64212	0.116879	1.90202
2.60	0.8520710	0.507781	2.64046	0.116186	1.89804
2.61	0.8532024	0.505520	2.63881	0.115499	1.89409
2.62	0.8543208	0.503278	2.63718	0.114820	1.89016
2.63	0.8554266	0.501055	2.63555	0.114147	1.88625
2.64	0.8565197	0.498851	2.63393	0.113480	1.88236
2.65	0.8576006	0.496665	2.63232	0.112820	1.87850
2.66	0.8586692	0.494497	2.63072	0.112166	1.87466
2.67	0.8597259	0.492347	2.62913	0.111518	1.87084
2.68	0.8607708	0.490214	2.62755	0.110877	1.86704
2.69	0.8618040	0.488100	2.62598	0.110241	1.86327
2.70	0.8628258	0.486002	2.62441	0.109611	1.85951
2.71	0.8638363	0.483922	2.62286	0.108988	1.85578
2.72	0.8648356	0.481858	2.62131	0.108370	1.85207
2.73	0.8658240	0.479811	2.61977	0.107758	1.84838
2.74	0.8668016	0.477781	2.61824	0.107151	1.84470
2.75	0.8677686	0.475767	2.61672	0.106550	1.84106
2.76	0.8687251	0.473769	2.61520	0.105955	1.83742
2.77	0.8696712	0.471787	2.61370	0.105365	1.83381
2.78	0.8706071	0.469820	2.61220	0.104780	1.83022
2.79	0.8715330	0.467870	2.61071	0.104201	1.82665
2.80	0.8724490	0.465934	2.60923	0.103627	1.82310
2.82	0.8742518	0.462109	2.60629	0.102494	1.81606
2.84	0.8760167	0.458343	2.60339	0.101382	1.80909
2.86	0.8777446	0.454635	2.60051	0.100290	1.80220
2.88	0.8794367	0.450984	2.59767	0.(1)992162*	1.79537

n	κ	V	2nV	I	2nπI
2.90	0.8810939	0.447388	2.59485	0.(1)981616	1.78863
2.92	0.8827172	0.443847	2.59206	0.(1)971253	1.78195
2.94	0.8843075	0.440358	2.58931	0.(1)961069	1.77534
2.96	0.8858656	0.436922	2.58658	0.(1)951060	1.76880
2.98	0.8873925	0.433536	2.58388	0.(1)941220	1.76233
3.00	0.8888889	0.430201	2.58120	0.(1)931548	1.75593
3.02	0.8903557	0.426913	2.57856	0.(1)922037	1.74959
3.04	0.8917936	0.423674	2.57594	0.(1)912686	1.74331
3.06	0.8932035	0.420481	2.57334	0.(1)903489	1.73710
3.08	0.8945859	0.417334	2.57078	0.(1)894444	1 73095
3.10	0.8959417	0.414231	2.56823	0.(1)885547	1.72486
3.12	0.8972715	0.411172	2.56572	0.(1)876795	1.71883
3.14	0.8985760	0.408157	2.56322	0.(1)868184	1.71286
3.16	0.8998558	0.405183	2.56076	0.(1)859712	1.70695
3.18	0.9011115	0.402250	2.55831	0.(1)851375	1.70109
3.20	0.9023438	0.399358	2.55589	0.(1)843170	1.69530
3.22	0.9035531	0.396505	2.55349	0.(1)835095	1.68955
3.24	0.9047401	0.393691	2.55112	0.(1)827146	1.68386
3.26	0.9059054	0.390915	2.54876	0.(1)819322	1.67823
3.28	0.9070494	0.388176	2.54643	0.(1)811618	1.67265
3.30	0.9081726	0.385474	2.54413	0.(1)804033	1.66712
3.32	0.9092757	0.382807	2.54184	0.(1)796564	1.66164
3.34	0.9103589	0.380176	2.53957	0.(1)789208	1.65622
3.36	0.9114229	0.377579	2.53733	0.(1)781964	1.65084
3.38	0.9124681	0.375015	2.53510	0.(1)774828	1.64552
3.40	0.9134948	0.372485	2.53290	0.(1)767800	1.64024
3.42	0.9145036	0.369988	2.53072	0.(1)760876	1.63501
3.44	0.9154949	0.367522	2.52855	0.(1)754054	1.62982
3.46	0.9164690	0.365088	2.52641	0.(1)747332	1.62469
3.48	0.9174263	0.362684	2.52428	0.(1)740708	1.61959
3.50	0.9183673	0.360311	2.52218	0.(1)734181	1.61455
3.52	0.9192924	0.357967	2.52009	0.(1)727748	1.60955
3.54	0.9202017	0.355653	2.51802	0.(1)721407	1.60459
3.56	0.9210958	0.353366	2.51597	0.(1)715157	1.59967
3.58	0.9219750	0.351108	2.51394	0.(1)708996	1.59480

n	u	V	$2nV$	I	$2n\pi I$
3.60	0.9228395	0.348878	2.51192	0.(1)702921	1.58997
3.62	0.9236898	0.346674	2.50992	0.(1)696932	1.58518
3.64	0.9245260	0.344498	2.50794	0.(1)691027	1.58043
3.66	0.9253486	0.342347	2.50598	0.(1)685203	1.57572
3.68	0.9261578	0.340222	2.50403	0.(1)679461	1.57106
3.70	0.9269540	0.338122	2.50210	0.(1)673797	1.56643
3.72	0.9277373	0.336047	2.50019	0.(1)668210	1.56184
3.74	0.9285081	0.333996	2.49829	0.(1)662700	1.55729
3.76	0.9292666	0.331969	2.49641	0.(1)657264	1.55277
3.78	0.9300132	0.329966	2.49454	0.(1)651901	1.54829
3.80	0.9307479	0.327986	2.49269	0.(1)646610	1.54385
3.82	0.9314712	0.326028	2.49086	0.(1)641390	1.53945
3.84	0.9321832	0.324093	2.48904	0.(1)636238	1.53508
3.86	0.9328841	0.322180	2.48723	0.(1)631155	1.53075
3.88	0.9335742	0.320288	2.48544	0.(1)626138	1.52645
3.90	0.9342538	0.318418	2.48366	0.(1)621187	1.52218
3.92	0.9349220	0.316569	2.48190	0.(1)616300	1.51795
3.94	0.9355820	0.314740	2.48015	0.(1)611476	1.51375
3.96	0.9362310	0.312931	2.47842	0.(1)606714	1.50959
3.98	0.9368703	0.311143	2.47670	0.(1)602013	1.50546
4.0	0.9375000	0.309374	2.47499	0.(1)597371	1.50136
4.1	0.9405116	0.300812	2.46666	0.(1)575026	1.48133
4.2	0.9433107	0.292695	2.45864	0.(1)554028	1.46205
4.3	0.9459167	0.284991	2.45092	0.(1)534266	1.44346
4.4	0.9483471	0.277669	2.44348	0.(1)515643	1.42555
4.5	0.9506173	0.270702	2.43631	0.(1)498067	1.40825
4.6	0.9527410	0.264065	2.42939	0.(1)481460	1.39155
4.7	0.9547306	0.257735	2.42271	0.(1)465748	1.37540
4.8	0.9565972	0.251693	2.41626	0.(1)450866	1.35978
4.9	0.9583507	0.245920	2.41002	0.(1)436754	1.34466
5.0	0.9600000	0.240398	2.40398	0.(1)423358	1.33002
5.1	0.9615532	0.235111	2.39813	0.(1)410627	1.31582
5.2	0.9630178	0.230045	2.39247	0.(1)398518	1.30206
5.3	0.9644001	0.225187	2.38698	0.(1)386988	1.28870
5.4	0.9657064	0.220524	2.38166	0.(1)376000	1.27574

* 本表中的缩减号(m)，其中m为一正整数，表示在所得的数值的小数点与第一位有效数字间有m个零。例如，0.(3)623485等价于0.000623485。

续表 1

n	κ	V	2nV	I	2nπI
5.5	0.9669421	0.216045	2.37649	0.(1)365518	1.26314
5.6	0.9681122	0.211740	2.37148	0.(1)355512	1.25090
5.7	0.9692213	0.207598	2.36662	0.(1)345950	1.23899
5.8	0.9702735	0.203611	2.36189	0.(1)336808	1.22741
5.9	0.9712726	0.199771	2.35729	0.(1)328058	1.21614
6.0	0.9722222	0.196069	2.35282	0.(1)319678	1.20516
6.1	0.9731255	0.192498	2.34848	0.(1)311647	1.19446
6.2	0.9739854	0.189052	2.34424	0.(1)303945	1.18404
6.3	0.9748047	0.185724	2.34012	0.(1)296553	1.17388
6.4	0.9755859	0.182509	2.33611	0.(1)289454	1.16396
6.5	0.9763314	0.179400	2.33220	0.(1)282632	1.15429
6.6	0.9770432	0.176393	2.32839	0.(1)276072	1.14484
6.7	0.9777233	0.173483	2.32467	0.(1)269761	1.13562
6.8	0.9783737	0.170665	2.32105	0.(1)263686	1.12662
6.9	0.9789960	0.167936	2.31751	0.(1)257834	1.11781
7.0	0.9795918	0.165290	2.31406	0.(1)252194	1.10921
7.1	0.9801624	0.162724	2.31069	0.(1)246756	1.10079
7.2	0.9807099	0.160236	2.30740	0.(1)241509	1.09256
7.3	0.9812348	0.157820	2.30418	0.(1)236444	1.08451
7.4	0.9817385	0.155475	2.30103	0.(1)231554	1.07663
7.5	0.9822222	0.153197	2.29796	0.(1)226830	1.06891
7.6	0.9826870	0.150984	2.29495	0.(1)222262	1.06135
7.7	0.9831337	0.148832	2.29201	0.(1)217846	1.05395
7.8	0.9835634	0.146740	2.28914	0.(1)213572	1.04669
7.9	0.9839769	0.144704	2.28632	0.(1)209437	1.03958
8.0	0.9843750	0.142723	2.28357	0.(1)205432	1.03261
8.2	0.9851279	0.138916	2.27823	0.(1)197794	1.01908
8.4	0.9858277	0.135304	2.27310	0.(1)190615	1.00604
8.6	0.9864792	0.131871	2.26818	0.(1)183859	0.993490
8.8	0.9870868	0.128605	2.26345	0.(1)177491	0.981385
9.0	0.9876543	0.125494	2.25890	0.(1)171481	0.969704
9.2	0.9881853	0.122528	2.25452	0.(1)165802	0.958421
9.4	0.9886827	0.119696	2.25029	0.(1)160428	0.947517
9.6	0.9891493	0.116990	2.24622	0.(1)155337	0.936969
9.8	0.9895877	0.114402	2.24229	0.(1)150509	0.926760

续表 1

n	κ	V	2nV	I	2nπI
10	0.9900000	0.111925	2.23849	0.(1)145925	0.916872
11	0.9917355	0.100968	2.22130	0.(1)126125	0.871711
12	0.9930556	0.(1)919421	2.20661	0.(1)110419	0.832542
13	0.9940828	0.(1)843805	2.19389	0.(2)977160	0.798158
14	0.9948980	0.(1)779559	2.18277	0.(2)872697	0.767664
15	0.9955556	0.(1)727314	2.17294	0.(2)785572	0.740384
16	0.9960938	0.(1)676313	2.16420	0.(2)712012	0.715793
17	0.9965398	0.(1)634226	2.15637	0.(2)649238	0.693478
18	0.9969136	0.(1)597029	2.14930	0.(2)595162	0.673112
19	0.9972299	0.(1)563921	2.14290	0.(2)548187	0.654428
20	0.9975000	0.(1)534265	2.13706	0.(2)507073	0.637207
21	0.9977324	0.(1)507552	2.13172	0.(2)470849	0.621269
22	0.9979339	0.(1)483365	2.12681	0.(2)438734	0.606462
23	0.9981096	0.(1)461364	2.12228	0.(2)410108	0.592660
24	0.9982639	0.(1)441267	2.11808	0.(2)384461	0.599754
25	0.9984000	0.(1)422838	2.11419	0.(2)361378	0.567651
26	0.9985207	0.(1)405877	2.11056	0.(2)340514	0.556273
27	0.9986283	0.(1)390218	2.10718	0.(2)321581	0.545548
28	0.9987245	0.(1)375715	2.10400	0.(2)304338	0.535419
29	0.9988109	0.(1)362247	2.10103	0.(2)288581	0.525831
30	0.9988889	0.(1)349706	2.09824	0.(2)274138	0.516738
35	0.9991837	0.(1)298061	2.08643	0.(2)217093	0.477412
40	0.9993750	0.(1)259664	2.07731	0.(2)177403	0.445863
45	0.9995062	0.(1)230004	2.07004	0.(2)148484	0.419828
50	0.9996000	0.(1)206410	2.06410	0.(2)126646	0.397870
55	0.9996694	0.(1)187195	2.05914	0.(2)109680	0.379026
60	0.9997222	0.(1)171245	2.05494	0.(3)961894	0.362625
65	0.9997633	0.(1)157795	2.05134	0.(3)852536	0.348182
70	0.9997969	0.(1)146300	2.04820	0.(3)762431	0.335335
75	0.9998222	0.(1)136363	2.04545	0.(3)687148	0.323811
80	0.9998438	0.(1)127688	2.04301	0.(3)623485	0.313400
85	0.9998616	0.(1)120049	2.04084	0.(3)569078	0.303928
90	0.9998765	0.(1)113272	2.03889	0.(3)522146	0.295267
95	0.9998892	0.(1)107217	2.03713	0.(3)481328	0.287306
100	0.9999000	0.(1)101776	2.03553	0.(3)445563	0.279955

续表 1

n	κ	V	2nV	I	2nπI
110	0.9999174	0.(2)923970	2.03273	0.(3)386025	0.266801
120	0.9999306	0.(2)845987	2.03037	0.(3)338658	0.255342
130	0.9999408	0.(2)780131	2.02834	0.(3)300242	0.245242
140	0.9999490	0.(2)723779	2.02658	0.(3)268576	0.236252
150	0.9999556	0.(2)675014	2.02504	0.(3)242110	0.228183
160	0.9999609	0.(2)632399	2.02368	0.(3)219721	0.220888
170	0.9999654	0.(2)594842	2.02246	0.(3)200582	0.214250
180	0.9999691	0.(2)561493	2.02137	0.(3)184069	0.208177
190	0.9999721	0.(2)531682	2.02039	0.(3)169703	0.202593
200	0.9999750	0.(2)504875	2.01950	0.(3)157113	0.197434
250	0.9999840	0.(2)403209	2.01605	0.(3)112359	0.176494
300	0.9999888	0.(2)335613	2.01368	0.(4)854428	0.161056
350	0.99999184	0.(2)287420	2.01194	0.(4)677858	0.149069
400	0.99999375	0.(2)251327	2.01062	0.(4)554706	0.139413
450	0.99999506	0.(2)223285	2.00957	0.(4)464799	0.131419
500	0.99999600	0.(2)200872	2.00872	0.(4)396802	0.124659
600	0.99999722	0.(2)167285	2.00742	0.(4)301799	0.113776
700	0.99999796	0.(2)143319	2.00647	0.(4)239463	0.105321
800	0.99999844	0.(2)125359	2.00574	0.(4)195977	0.(1)985087
900	0.99999877	0.(2)111398	2.00517	0.(4)164226	0.(1)928674
1000	0.99999900	0.(2)100235	2.00471	0.(4)140209	0.(1)880960
1500	0.99999956	0.(3)667757	2.00327	0.(5)763051	0.(1)719158
2000	0.99999975	0.(3)500632	2.00253	0.(5)495567	0.(1)622747
2500	0.99999984	0.(3)400413	2.00206	0.(5)354507	0.(1)556969
3000	0.99999989	0.(3)333625	2.00175	0.(5)269725	0.(1)508420
3500	0.99999992	0.(3)285932	2.00152	0.(5)214037	0.(1)470692
4000	0.99999994	0.(3)250168	2.00135	0.(5)175183	0.(1)440282
4500	0.99999995	0.(3)222357	2.00121	0.(5)146810	0.(1)415095
5000	0.99999996	0.(3)200110	2.00110	0.(5)125347	0.(1)393789
5500	0.99999997	0.(3)181910	2.00101	0.(5)108647	0.(1)375458
6000	0.99999997	0.(3)166744	2.00093	0.(6)953526	0.(1)359471
……	……	……	……	……	……
……	……	……	……	……	……
……	……	……	……	……	……
∞	1.00000000	0.000000	2.00000	0.000000	0.000000

表 2　不同卵指数n值下的全卵圆积分J与L

$$J=\int_0^{\pi/2}\sin^{n-1}\theta\sqrt{1-\varepsilon\cos^2\theta}\,d\theta;$$

$$L=\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-1}\theta\cos\theta\sqrt{1-\varepsilon\cos^2\theta}\,d\theta,$$

这里　　$\varepsilon=1-n^2$

n	ε	J	2J	L	2πL
0.0000	1.00000000	2.57080	5.14159	1.50000	9.42478
0.0002	0.99999996	2.56883	5.13765	1.49785	9.41126
0.0004	0.99999984	2.56711	5.13423	1.49596	9.39939
0.0006	0.99999964	2.56552	5.13104	1.49419	9.38826
0.0008	0.99999936	2.56399	5.12799	1.49249	9.37758
0.0010	0.99999900	2.56252	5.12504	1.49084	9.36724
0.0012	0.99999856	2.56109	5.12218	1.48924	9.35717
0.0014	0.99999804	2.55969	5.11938	1.48767	9.34733
0.0016	0.99999744	2.55832	5.11665	1.48614	9.33768
0.0018	0.99999676	2.55698	5.11397	1.48463	9.32821
0.0020	0.9999960	2.55567	5.11133	1.48315	9.31889
0.0022	0.9999952	2.55437	5.10874	1.48169	9.30972
0.0024	0.9999942	2.55309	5.10619	1.48025	9.30067
0.0026	0.9999932	2.55183	5.10367	1.47883	9.29174
0.0028	0.9999922	2.55059	5.10118	1.47742	9.28292
0.0030	0.9999910	2.54936	5.09873	1.47603	9.27420
0.0032	0.9999898	2.54815	5.09630	1.47466	9.26558
0.0034	0.9999884	2.54695	5.09390	1.47330	9.25704
0.0036	0.9999870	2.54576	5.09152	1.47196	9.24860
0.0038	0.9999856	2.54459	5.08917	1.47063	9.24023
0.0040	0.9999840	2.54342	5.08685	1.46931	9.23195
0.0042	0.9999824	2.54227	5.08454	1.46800	9.22373
0.0044	0.9999806	2.54112	5.08225	1.46671	9.21559
0.0046	0.9999788	2.53999	5.07998	1.46542	9.20751
0.0048	0.9999770	2.53887	5.07774	1.46415	9.19950

续表 2

n	a	J	2J	L	$2\pi L$
0.0050	0.9999750	2.53775	5.07551	1.46288	9.19156
0.0052	0.9999730	2.53665	5.07330	1.46163	9.18367
0.0054	0.9999708	2.53555	5.07110	1.46038	9.17584
0.0056	0.9999686	2.53446	5.06892	1.45914	9.16807
0.0058	0.9999664	2.53338	5.06676	1.45792	9.16035
0.0060	0.9999640	2.53230	5.06461	1.45670	9.15268
0.0062	0.9999616	2.53124	5.06248	1.45548	9.14507
0.0064	0.9999590	2.53018	5.06036	1.45428	9.13750
0.0066	0.9999564	2.52912	5.05825	1.45308	9.12998
0.0068	0.9999538	2.52808	5.05616	1.45189	9.12251
0.0070	0.9999510	2.52704	5.05408	1.45071	9.11509
0.0072	0.9999482	2.52601	5.05201	1.44954	9.10771
0.0074	0.9999452	2.52498	5.04996	1.44837	9.10037
0.0076	0.9999422	2.52396	5.04792	1.44721	9.09307
0.0078	0.9999392	2.52294	5.04588	1.44605	9.08582
0.0080	0.9999360	2.52193	5.04387	1.44490	9.07861
0.0085	0.9999278	2.51943	5.03887	1.44206	9.06074
0.0090	0.9999190	2.51697	5.03393	1.43926	9.04311
0.0095	0.9999098	2.51453	5.02906	1.43648	9.02570
0.0100	0.9999000	2.51212	5.02425	1.43375	9.00850
0.0105	0.9998898	2.50975	5.01949	1.43104	8.99150
0.0110	0.9998790	2.50739	5.01479	1.42837	8.97470
0.0115	0.9998678	2.50507	5.01014	1.42572	8.95808
0.0120	0.9998560	2.50277	5.00554	1.42311	8.94164
0.0125	0.9998438	2.50050	5.00098	1.42052	8.92536
0.0130	0.9998310	2.49824	4.99647	1.41795	8.90926
0.0135	0.9998178	2.49600	4.99201	1.41795	8.90926
0.0140	0.9998040	2.49379	4.98758	1.41290	8.87751
0.0145	0.9997898	2.49160	4.98320	1.41041	8.86186
0.0150	0.9997750	2.48943	4.97886	1.40794	8.84636
0.0155	0.9997598	2.48728	4.97455	1.40550	8.83100
0.0160	0.9997440	2.48514	4.97029	1.40307	8.81577
0.0165	0.9997278	2.48303	4.96605	1.40067	8.80067
0.0170	0.9997110	2.48093	4.96186	1.39827	8.78570
0.0175	0.9996938	2.47885	4.95769	1.39593	8.77085

续表 2

n	ε	J	2J	L	2πL
0.0180	0.9996760	2.47678	4.95356	1.39358	8.75614
0.0185	0.9996578	2.47473	4.94947	1.39126	8.74153
0.0190	0.9996390	2.47270	4.94540	1.38895	8.72704
0.0195	0.9996198	2.47068	4.94136	1.38666	8.71267
0.0200	0.9996000	2.46868	4.93736	1.38439	8.69840
0.0205	0.9995798	2.46669	4.93338	1.38214	8.68424
0.0210	0.9995590	2.46472	4.92943	1.37990	8.67019
0.0215	0.9995378	2.46276	4.92551	1.37768	8.65623
0.0220	0.9995160	2.46080	4.92161	1.37548	8.64238
0.0225	0.9994938	2.45887	4.91775	1.37329	8.62863
0.0230	0.9994710	2.45695	4.91390	1.37112	8.61497
0.0235	0.9994478	2.45504	4.91009	1.36896	8.60141
0.0240	0.9994240	2.45315	4.90630	1.36681	8.58794
0.0245	0.9993998	2.45126	4.90253	1.36468	8.57456
0.0250	0.9993750	2.44939	4.89878	1.36257	8.56127
0.0255	0.9993498	2.44753	4.89506	1.36047	8.54807
0.0260	0.9993240	2.44568	4.89137	1.35838	8.53496
0.0265	0.9992978	2.44385	4.88769	1.35631	8.52192
0.0270	0.9992710	2.44202	4.88404	1.35424	8.50897
0.0275	0.9992438	2.44020	4.88041	1.35220	8.49610
0.0280	0.9992160	2.43840	4.87680	1.35016	8.48332
0.0285	0.9991878	2.43660	4.87321	1.34814	8.47061
0.0290	0.9991590	2.43482	4.86964	1.34613	8.45797
0.0300	0.9991000	2.43128	4.86256	1.34214	8.43294
0.0305	0.9990698	2.42953	4.85906	1.34017	8.42053
0.0310	0.9990390	2.42778	4.85557	1.33820	8.40819
0.0315	0.9990078	2.42605	4.85210	1.33625	8.39593
0.0320	0.9989760	2.42432	4.84864	1.33431	8.38374
0.0325	0.9989438	2.42260	4.84521	1.33238	8.37161
0.0330	0.9989110	2.42090	4.84179	1.33046	8.35955
0.0335	0.9988778	2.41920	4.83840	1.32856	8.34756
0.0340	0.9988440	2.41751	4.83502	1.32666	8.33564
0.0345	0.9988098	2.41583	4.83165	1.32477	8.32378
0.0350	0.9987750	2.41415	4.82831	1.32290	8.31199

续表 2

n	ε	J	2J	L	2πL
0.0355	0.9987398	2.41249	4.82500	1.32103	8.30026
0.0360	0.9987040	2.41083	4.82166	1.31917	8.28860
0.0365	0.9986678	2.40918	4.81837	1.31732	8.27699
0.0370	0.9986310	2.40754	4.81509	1.31549	8.26545
0.0375	0.9985938	2.40591	4.81182	1.31366	8.25397
0.0380	0.9985560	2.40430	4.80857	1.31184	8.24254
0.0385	0.9985178	2.40267	4.80534	1.31003	8.23118
0.0390	0.9984790	2.40106	4.80212	1.30823	8.21987
0.0395	0.9984398	2.39946	4.79892	1.30644	8.20862
0.0400	0.9984000	2.39787	4.79573	1.30466	8.19743
0.041	0.9983190	2.39470	4.78940	1.30112	8.17521
0.042	0.9982360	2.39156	4.78313	1.29762	8.15321
0.043	0.9981510	2.38846	4.77691	1.29416	8.13142
0.044	0.9980640	2.38537	4.77075	1.29072	8.10984
0.045	0.9979750	2.38232	4.76464	1.28732	8.08846
0.046	0.9978840	2.37929	4.75858	1.28395	8.06728
0.047	0.9977910	2.37628	4.75257	1.28061	8.04630
0.048	0.9976960	2.37331	4.74661	1.27730	8.02551
0.049	0.9975990	2.37035	4.74070	1.27402	8.00490
0.050	0.9975000	2.36742	4.73484	1.27077	7.98448
0.051	0.9973990	2.36452	4.72903	1.26755	7.96423
0.052	0.9972960	2.36163	4.72326	1.26435	7.94416
0.053	0.9971910	2.35877	4.71754	1.26119	7.92427
0.054	0.9970840	2.35593	4.71186	1.25805	7.90454
0.055	0.9969750	2.35311	4.70623	1.25493	7.88498
0.056	0.9968640	2.35032	4.70064	1.25185	7.86558
0.057	0.9967510	2.34754	4.69508	1.24878	7.84634
0.058	0.9966360	2.34479	4.68958	1.24575	7.82726
0.059	0.9965190	2.34205	4.68841	1.24273	7.80832
0.060	0.9964000	2.33934	4.67868	1.23974	7.78955
0.061	0.9962790	2.33664	4.67328	1.23678	7.77092
0.062	0.9961560	2.33397	4.66793	1.23384	7.75243
0.063	0.9960310	2.33131	4.66262	1.23092	7.73409
0.064	0.9959040	2.32867	4.65734	1.22802	7.71589
0.065	0.9957750	2.32605	4.65210	1.22515	7.69783

续表 2

n	ε	J	2J	L	2πL
0.066	0.9956440	2.32344	4.64689	1.22230	7.67991
0.067	0.9955110	2.32086	4.64172	1.21946	7.66212
0.068	0.9953780	2.31829	4.63658	1.21665	7.64446
0.069	0.9952390	2.31574	4.63148	1.21386	7.62693
0.070	0.9951000	2.31320	4.62641	1.21109	7.60953
0.071	0.9949590	2.31069	4.62137	1.20834	7.59226
0.072	0.9948160	2.30818	4.61637	1.20562	7.57511
0.073	0.9946710	2.30570	4.61140	1.20291	7.55808
0.074	0.9945240	2.30323	4.60646	1.20022	7.54118
0.075	0.9943750	2.30077	4.60155	1.19754	7.52439
0.076	0.9942240	2.29834	4.59667	1.19489	7.50772
0.077	0.9940710	2.29591	4.59182	1.19226	7.49116
0.078	0.9939160	2.29350	4.58700	1.18964	7.47472
0.079	0.9937590	2.29111	4.58222	1.18704	7.45839
0.080	0.9936000	2.28873	4.57746	1.18446	7.44218
0.081	0.9934390	2.28636	4.57272	1.18190	7.42607
0.082	0.9932760	2.28401	4.56802	1.17935	7.41006
0.083	0.9931110	2.28167	4.56335	1.17682	7.39417
0.084	0.9929440	2.27935	4.55870	1.17430	7.37838
0.085	0.9927750	2.27704	4.55408	1.17181	7.36269
0.086	0.9926040	2.27474	4.54948	1.16933	7.34711
0.087	0.9924310	2.27246	4.54492	1.16686	7.33162
0.088	0.9922560	2.27019	4.54037	1.16442	7.31624
0.089	0.9920790	2.26793	4.53586	1.16198	7.30095
0.090	0.9919000	2.26568	4.53137	1.15956	7.28576
0.091	0.9917190	2.26345	4.52690	1.15716	7.27066
0.092	0.9915360	2.26123	4.52246	1.15478	7.25566
0.093	0.9913510	2.25902	4.51805	1.15240	7.24076
0.094	0.9911640	2.25683	4.51366	1.15004	7.22594
0.095	0.9909750	2.25464	4.50929	1.14770	7.21122
0.096	0.9907840	2.25247	4.50494	1.14537	7.19659
0.097	0.9905910	2.25031	4.50062	1.14306	7.18204
0.098	0.9903960	2.24816	4.49632	1.14076	7.16758
0.099	0.9901990	2.24602	4.49205	1.13847	7.15322
0.100	0.9900000	2.24390	4.48780	1.13620	7.13893

续表2

n	ε	J	2J	L	2πL
0.101	0.9897990	2.24178	4.48357	1.13394	7.12473
0.102	0.9895960	2.23968	4.47936	1.13169	7.11062
0.103	0.9893910	2.23759	4.47518	1.12946	7.09658
0.104	0.9891840	2.23550	4.47101	1.12724	7.08263
0.105	0.9889750	2.23343	4.46687	1.12503	7.06876
0.106	0.9887640	2.23137	4.46275	1.12283	7.05497
0.107	0.9885510	2.22932	4.45865	1.12065	7.04126
0.108	0.9883360	2.22728	4.45456	1.11848	7.02763
0.109	0.9881190	2.22525	4.45050	1.11632	7.01407
0.110	0.9879000	2.22323	4.44646	1.11418	7.00059
0.111	0.9876790	2.22122	4.44245	1.11205	6.98719
0.112	0.9874560	2.21922	4.43845	1.10992	6.97386
0.113	0.9872310	2.21723	4.43447	1.10782	6.96061
0.114	0.9870040	2.21526	4.43050	1.10572	6.94743
0.115	0.9867750	2.21328	4.42656	1.10363	6.93432
0.116	0.9865440	2.21132	4.42264	1.10156	6.92129
0.117	0.9863110	2.20937	4.41874	1.09949	6.90832
0.118	0.9860760	2.20743	4.41485	1.09744	6.89543
0.119	0.9858390	2.20549	4.41099	1.09540	6.88260
0.120	0.9856000	2.20357	4.40714	1.09337	6.86985
0.122	0.9851160	2.19945	4.39950	1.08934	6.84454
0.124	0.9846240	2.19596	4.39193	1.08536	6.81950
0.126	0.9841240	2.19221	4.38433	1.08141	6.79472
0.128	0.9836160	2.18850	4.37699	1.07751	6.77020
0.130	0.9831000	2.18480	4.36963	1.07365	6.74594
0.132	0.9825760	2.18116	4.36233	1.06983	6.72192
0.134	0.9820440	2.17755	4.35509	1.06604	6.69814
0.136	0.9815040	2.17396	4.34792	1.06230	6.67460
0.138	0.9809560	2.17041	4.34081	1.05859	6.65130
0.140	0.9804000	2.16688	4.33377	1.05492	6.62823
0.142	0.9798360	2.16339	4.32678	1.05128	6.60538
0.144	0.9792640	2.15993	4.31985	1.04768	6.58275
0.146	0.9786840	2.15649	4.31298	1.04411	6.56032
0.148	0.9780960	2.15309	4.30617	1.04058	6.53815
0.150	0.9775000	2.14971	4.29942	1.03708	6.51616

续表 2

n	ε	J	2J	L	2πL
0.152	0.9768960	2.14636	4.29272	1.03361	6.49438
0.154	0.9762840	2.14304	4.28607	1.03018	6.47281
0.156	0.9756640	2.13974	4.27948	1.02678	6.45143
0.158	0.9750360	2.13647	4.27295	1.02341	6.43025
0.160	0.9744000	2.13323	4.26646	1.02007	6.40927
0.162	0.9737650	2.13001	4.26002	1.01676	6.38847
0.164	0.9731040	2.12682	4.25369	1.01348	6.36786
0.166	0.9724440	2.12365	4.24731	1.01023	6.34744
0.168	0.9717760	2.12051	4.24102	1.00700	6.32720
0.170	0.9711000	2.11739	4.23479	1.00381	6.30713
0.172	0.9704160	2.11430	4.22860	1.00065	6.28724
0.174	0.9697240	2.11123	4.22245	0.997508	6.26752
0.176	0.9690240	2.10818	4.21636	0.994396	6.24798
0.178	0.9683160	2.10515	4.21031	0.991312	6.22860
0.180	0.9676000	2.10215	4.20430	0.988254	6.20938
0.182	0.9668760	2.09917	4.19834	0.985222	6.19033
0.184	0.9661440	2.09621	4.19242	0.982215	6.17144
0.186	0.9654040	2.09327	4.18655	0.979233	6.15270
0.188	0.9646560	2.09036	4.18072	0.976276	6.13413
0.190	0.9639000	2.08746	4.17493	0.973344	6.11570
0.192	0.9631360	2.08459	4.16918	0.970436	6.09743
0.194	0.9623640	2.08174	4.16347	0.967551	6.09730
0.196	0.9615840	2.07890	4.15780	0.964689	6.06132
0.198	0.9607960	2.07609	4.15217	0.961851	6.04349
0.200	0.9600000	2.07329	4.14659	0.959035	6.02579
0.202	0.9591960	2.07052	4.14104	0.956242	6.00824
0.204	0.9583840	2.06776	4.13552	0.953470	5.99083
0.206	0.9575640	2.06502	4.13005	0.950721	5.97356
0.208	0.9567360	2.06231	4.12461	0.947993	5.95641
0.210	0.9559000	2.05961	4.11921	0.945286	5.93940
0.212	0.9550560	2.05692	4.11385	0.942600	5.92253
0.214	0.9542040	2.05426	4.10852	0.939934	5.90578
0.216	0.9533440	2.05161	4.10323	0.937289	5.88916
0.218	0.9524760	2.04898	4.09797	0.934664	5.87267
0.220	0.9516000	2.04637	4.09275	0.932059	5.85630

续表 2

n	e	J	2J	L	2πL
0.222	0.9507160	2.04378	4.08756	0.929474	5.84006
0.224	0.9498240	2.04120	4.08240	0.926908	5.82393
0.226	0.9489240	2.03864	4.07728	0.924360	5.80793
0.228	0.9480160	2.03610	4.07219	0.921832	5.79204
0.230	0.9471000	2.03357	4.06714	0.919322	5.77627
0.232	0.9461760	2.03106	4.06211	0.916831	5.76062
0.234	0.9452440	2.02856	4.05712	0.914358	5.74508
0.236	0.9443040	2.02608	4.05216	0.911902	5.72965
0.238	0.9433560	2.02361	4.04723	0.909464	5.71433
0.240	0.9424000	2.02116	4.04233	0.907044	5.69913
0.242	0.9414360	2.01873	4.03746	0.904641	5.68403
0.244	0.9404640	2.01631	4.03262	0.902255	5.66904
0.246	0.9394840	2.01391	4.02781	0.899886	5.65415
0.248	0.9384960	2.01152	4.02303	0.897534	5.63937
0.250	0.9375000	2.00914	4.01828	0.895198	5.62469
0.252	0.9364960	2.00678	4.01356	0.892878	5.61032
0.254	0.9354840	2.00443	4.00887	0.890574	5.59564
0.256	0.9344640	2.00210	4.00420	0.888286	5.58126
0.258	0.9334360	1.99978	3.99956	0.886014	5.56699
0.260	0.9324000	1.99748	3.99495	0.883757	5.55281
0.262	0.9313560	1.99519	3.99037	0.881515	5.53872
0.264	0.9303040	1.99291	3.98582	0.879289	5.52474
0.266	0.9292440	1.99064	3.98129	0.877078	5.51084
0.268	0.9281760	1.98839	3.97678	0.874881	5.49704
0.270	0.9271000	1.98615	3.97231	0.872699	5.48333
0.272	0.9260160	1.98393	3.96786	0.870532	5.46971
0.274	0.9249240	1.98172	3.96343	0.868379	5.45618
0.276	0.9238240	1.97952	3.95903	0.866240	5.44274
0.278	0.9227160	1.97733	3.95466	0.864115	5.42939
0.280	0.9216000	1.97515	3.95031	0.862004	5.41613
0.282	0.9204760	1.97299	3.94598	0.859906	5.40295
0.284	0.9193440	1.97084	3.94168	0.857822	5.38986
0.286	0.9182040	1.96870	3.93740	0.855752	5.37685
0.288	0.9170560	1.96657	3.93315	0.853694	5.36392
0.290	0.9159000	1.96446	3.92892	0.851650	5.35108

续表 2

n	e	J	2J	L	2πL
0.292	0.9147360	1.96236	3.92471	0.849619	5.33831
0.294	0.9135640	1.96026	3.92053	0.847600	5.32563
0.296	0.9123840	1.95818	3.91637	0.845595	5.31303
0.298	0.9111960	1.95612	3.91223	0.843602	5.30051
0.300	0.9100000	1.95406	3.90812	0.841621	5.28806
0.305	0.9069750	1.94896	3.89792	0.836723	5.25728
0.310	0.9039000	1.94394	3.88787	0.831809	5.22698
0.315	0.9007750	1.93897	3.87795	0.827149	5.19713
0.320	0.8976000	1.93408	3.86815	0.822470	5.16773
0.325	0.8943750	1.92924	3.85849	0.817860	5.13877
0.330	0.8911000	1.92447	3.84894	0.813318	5.11023
0.335	0.8877750	1.91976	3.83952	0.808843	5.08211
0.340	0.8844000	1.91511	3.83022	0.804431	5.05439
0.345	0.8809750	1.91052	3.82103	0.800083	5.02707
0.350	0.8775000	1.90598	3.81196	0.795796	5.00014
0.355	0.8739750	1.90150	3.80300	0.791570	4.97358
0.360	0.8704000	1.89707	3.79414	0.787402	4.94739
0.365	0.8667750	1.89270	3.78540	0.783291	4.92156
0.370	0.8631000	1.88838	3.77675	0.779236	4.89609
0.375	0.8593750	1.88411	3.76821	0.775237	4.87096
0.380	0.8556000	1.87989	3.75977	0.771291	4.84616
0.385	0.8517750	1.87572	3.75143	0.767397	4.82170
0.390	0.8479000	1.87159	3.74318	0.763555	4.79756
0.395	0.8439750	1.86752	3.73503	0.759763	4.77373
0.400	0.8400000	1.86349	3.72697	0.756020	4.75021
0.405	0.8359750	1.85950	3.71900	0.752325	4.72700
0.410	0.8319000	1.85556	3.71112	0.748678	4.70408
0.415	0.8277750	1.85167	3.70333	0.745076	4.68145
0.420	0.8236000	1.84781	3.69562	0.741520	4.65910
0.425	0.8193750	1.84400	3.68800	0.738008	4.63704
0.430	0.8151000	1.84023	3.68046	0.734539	4.61524
0.435	0.8107750	1.83650	3.67300	0.731113	4.59372
0.440	0.8064000	1.83281	3.66562	0.727728	4.57245
0.445	0.8019750	1.82916	3.65832	0.724384	4.55144
0.450	0.7975000	1.82555	3.65110	0.721081	4.53068

n	e	J	2J	L	2πL
0.455	0.7929750	1.82197	3.64395	0.717816	4.51017
0.460	0.7884000	1.81844	3.63687	0.714591	4.48991
0.465	0.7837750	1.81493	3.63987	0.711403	4.46987
0.470	0.7791000	1.81147	3.62294	0.708252	4.45008
0.475	0.7743750	1.80804	3.61608	0.705137	4.43051
0.480	0.7696000	1.80464	3.60929	0.702058	4.41116
0.485	0.7647750	1.80128	3.60256	0.699014	4.39204
0.490	0.7599000	1.79795	3.59591	0.696005	4.37313
0.495	0.7549750	1.79466	3.58932	0.693029	4.35443
0.500	0.7500000	1.79139	3.58279	0.690086	4.33594
0.505	0.7449750	1.78816	3.57632	0.687176	4.31766
0.510	0.7399000	1.78496	3.56993	0.684298	4.29957
0.515	0.7347750	1.78179	3.56359	0.681452	4.28170
0.520	0.7296000	1.77866	3.55731	0.678636	4.26400
0.525	0.7243750	1.77555	3.55109	0.675851	4.24650
0.530	0.7191000	1.77247	3.54493	0.673095	4.22918
0.535	0.7137750	1.76942	3.53883	0.670369	4.21205
0.540	0.7084000	1.76639	3.53279	0.667672	4.19510
0.545	0.7029750	1.76340	3.52680	0.665002	4.17833
0.550	0.6975000	1.76043	3.52086	0.662361	4.16174
0.555	0.6919750	1.75749	3.51498	0.659747	4.14531
0.560	0.6864000	1.75458	3.50916	0.657160	4.12906
0.565	0.6807750	1.75169	3.50339	0.654600	4.11297
0.570	0.6751000	1.74883	3.49766	0.652065	4.09705
0.575	0.6693750	1.74600	3.49200	0.649556	4.08128
0.580	0.6636000	1.74319	3.48638	0.647072	4.06568
0.585	0.6577750	1.74040	3.48081	0.644614	4.05023
0.590	0.6519000	1.73764	3.47529	0.642179	4.03493
0.595	0.6459750	1.73491	3.46981	0.639768	4.01978
0.600	0.6400000	1.73219	3.46439	0.637382	4.00479
0.605	0.6339750	1.72950	3.45901	0.635018	3.98994
0.610	0.6279000	1.72684	3.45368	0.632677	3.97523
0.615	0.6217750	1.72420	3.44839	0.630359	3.96066
0.620	0.6156000	1.72158	3.44315	0.628063	3.94624
0.625	0.6093750	1.71898	3.43795	0.625789	3.93195

续表 2

n	ε	J	2J	L	2πL
0.630	0.6031000	1.71640	3.43280	0.623536	3.91779
0.635	0.5967750	1.71385	3.42769	0.621305	3.90377
0.640	0.5904000	1.71131	3.42262	0.619094	3.88988
0.645	0.5839750	1.70880	3.41760	0.616904	3.87612
0.650	0.5775000	1.70631	3.41261	0.614735	3.86241
0.655	0.5709750	1.70384	3.40767	0.612585	3.84898
0.660	0.5644000	1.70138	3.40277	0.610455	3.83560
0.665	0.5577750	1.69895	3.39790	0.608344	3.82234
0.670	0.5511000	1.69654	3.39308	0.606253	3.80920
0.675	0.5443750	1.69415	3.38829	0.604180	3.79617
0.680	0.5376000	1.69177	3.38355	0.602126	3.78327
0.685	0.5307750	1.68942	3.37884	0.600090	3.77048
0.690	0.5239000	1.68708	3.37416	0.598072	3.75780
0.695	0.5169750	1.68476	3.36953	0.596072	3.74523
0.700	0.5100000	1.68246	3.36493	0.594089	3.73277
0.705	0.5029750	1.68018	3.36037	0.592124	3.72042
0.710	0.4959000	1.67792	3.35584	0.590176	3.70818
0.715	0.4887750	1.67567	3.35135	0.588244	3.69605
0.720	0.4816000	1.67344	3.34689	0.586329	3.68402
0.725	0.4743750	1.67123	3.34246	0.584431	3.67209
0.730	0.4671000	1.66904	3.33807	0.582548	3.66026
0.735	0.4597750	1.66686	3.33371	0.580682	3.64853
0.740	0.4524000	1.66469	3.32939	0.578831	3.63690
0.745	0.4449750	1.66255	3.32510	0.576996	3.62537
0.750	0.4375000	1.66042	3.32084	0.575176	3.61391
0.755	0.4299750	1.65830	3.31661	0.573371	3.60260
0.760	0.4224000	1.65620	3.31241	0.571581	3.59135
0.765	0.4147750	1.65412	3.30824	0.569806	3.58019
0.770	0.4071000	1.65205	3.30411	0.668045	3.56913
0.775	0.3993750	1.65000	3.30000	0.566298	3.55816
0.780	0.3916000	1.64796	3.29592	0.564566	3.54727
0.785	0.3837750	1.64594	3.29188	0.562847	3.53647
0.790	0.3759000	1.64393	3.28786	0.561142	3.52576
0.795	0.3679750	1.64194	3.28387	0.559451	3.51514
0.800	0.3600000	1.63996	3.27991	0.557773	3.50459

续表 2

n	e	J	2J	L	2πL
0.805	0.3519750	1.63799	3.27598	0.556109	3.49414
0.810	0.3439000	1.63604	3.27208	0.554457	3.48376
0.815	0.3357750	1.63410	3.26820	0.552819	3.47346
0.820	0.3276000	1.63217	3.26435	0.551193	3.46325
0.825	0.3193750	1.63026	3.26053	0.549580	3.45311
0.830	0.3111000	1.62836	3.25673	0.547979	3.44306
0.835	0.3027750	1.62648	3.25296	0.546391	3.43307
0.840	0.2944000	1.62461	3.24922	0.544814	3.42317
0.845	0.2859750	1.62275	3.24550	0.543250	3.41334
0.850	0.2775000	1.62090	3.24180	0.541698	3.40359
0.855	0.2689750	1.61907	3.23814	0.540157	3.39390
0.860	0.2604000	1.61725	3.23450	0.538628	3.38430
0.865	0.2517750	1.61544	3.23088	0.537110	3.37476
0.870	0.2431000	1.61364	3.22728	0.535603	3.36530
0.875	0.2343750	1.61186	3.22371	0.534108	3.35590
0.880	0.2256000	1.61008	3.22017	0.532624	3.34657
0.885	0.2167750	1.60832	3.21664	0.531150	3.33732
0.890	0.2079000	1.60657	3.21314	0.529688	3.32812
0.895	0.1989750	1.60483	3.20967	0.528236	3.31900
0.900	0.1900000	1.60311	3.20622	0.526794	3.30994
0.905	0.1809750	1.60139	3.20278	0.525363	3.30095
0.910	0.1719000	1.59969	3.19938	0.523942	3.29202
0.915	0.1627750	1.59800	3.19599	0.522532	3.28316
0.920	0.1536000	1.59631	3.19263	0.521131	3.27436
0.925	0.1443750	1.59464	3.18928	0.519740	3.26562
0.930	0.1351000	1.59298	3.18596	0.518359	3.25695
0.935	0.1257750	1.59133	3.18266	0.516988	3.24833
0.940	0.1164000	1.58969	3.17938	0.515627	3.23979
0.945	0.1069750	1.58806	3.17612	0.514275	3.23128
0.950	0.0975000	1.58644	3.17289	0.512932	3.22285
0.955	0.0879750	1.58483	3.16967	0.511599	3.21447
0.960	0.0784000	1.58324	3.16647	0.510274	3.20615
0.965	0.0687750	1.58165	3.16329	0.508959	3.19789
0.970	0.0591000	1.58007	3.16014	0.507653	3.18968
0.975	0.0493750	1.57850	3.15700	0.506356	3.18153

续表 2

m	ε	J	2J	L	2πL
0.980	0.0396000	1.57694	3.15388	0.505068	3.17343
0.985	0.0297750	1.57539	3.15078	0.503788	3.16539
0.990	0.0199000	1.57385	3.14770	0.502517	3.15741
0.995	0.0099750	1.57232	3.14464	0.501254	3.14947
1.000	0.0000000	1.57080	3.14159	0.500000	3.14159

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝解析几何与微积分学专题　　卵圆与卵圆积分及其应用
作者＝
页数＝１０７
ＳＳ号＝１００６９８７２
出版日期＝